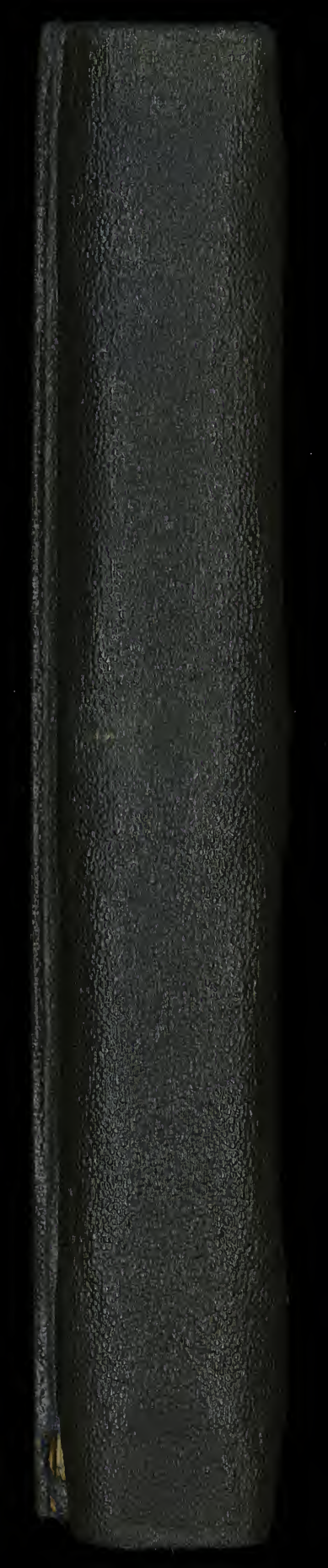


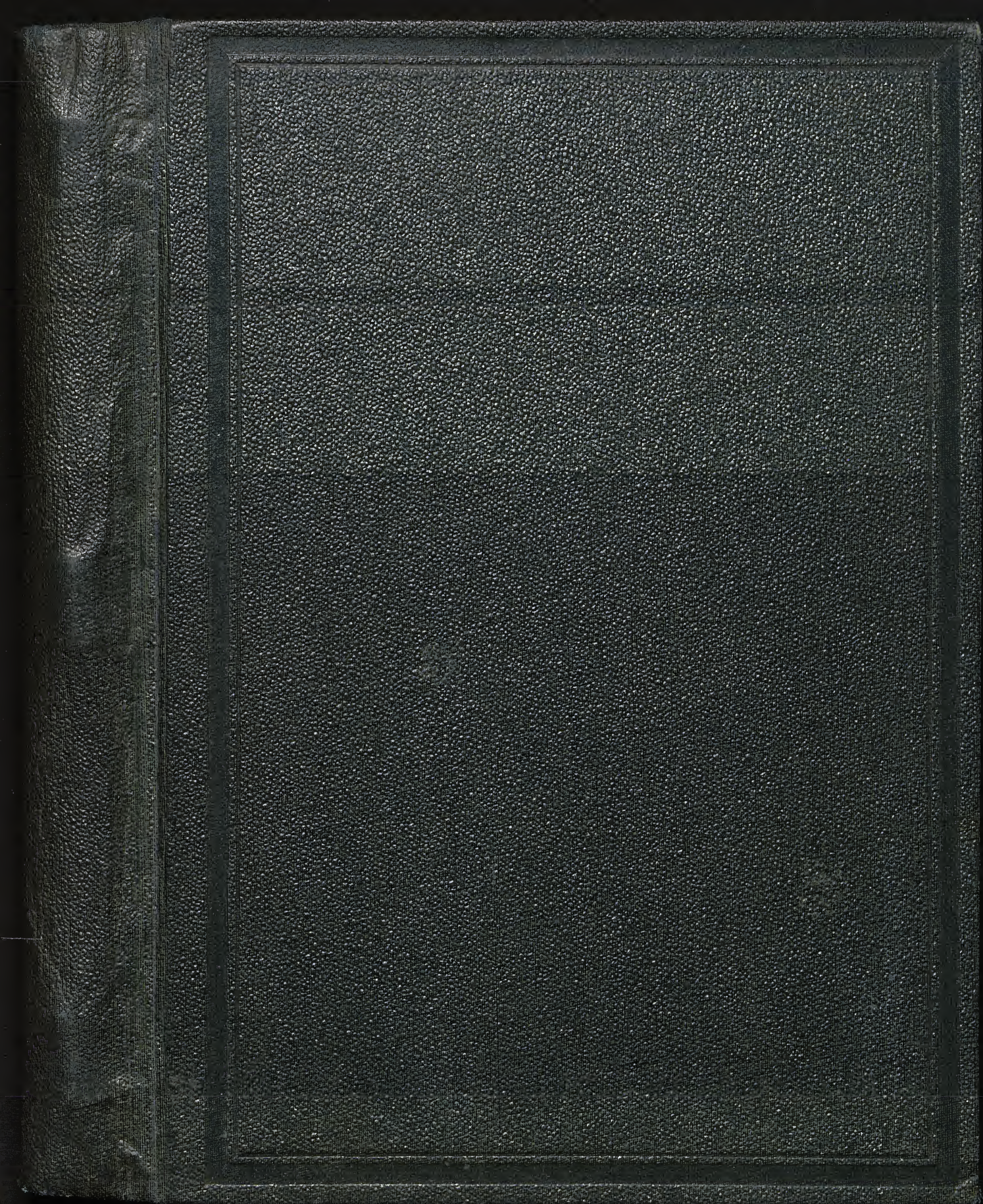
colorchecker CLASSIC



x-rite







PAPETERIE REGISTRES
 Spécialité pour Collèges
AUFFROY J^{ne}
 61, rue Caumartin, PARIS

MAIN DROITE



RELIURE ÉLECTRIQUE OU INSTANTANÉE

I. F.

Exiger la Marque de Fabrique PARIS-LONDON
 Patent

MODE D'EMPLOI

De la main gauche soulever un des côtés en appuyant l'intérieur de l'autre sur le bureau; e dos se trouvant ainsi ouvert, la main droite sert à introduire ou retirer les papiers.

Laisser la reliure revenir sur elle-même et les papiers se trouvent fixés.

N.-B. — La chemise renfermée dans chaque reliure n'est pas indispensable, mais elle facilite l'introduction des papiers.

RELIURE ÉLECTRIQUE

*Servant à relier soi-même sans
 difficulté, les papiers, manuscrits,
 documents, etc.*

FORMAT	HAUT. LARG.
N° 0	22 × 14
» 1 In-8°	24 × 16 1/2
» 2 In-4°	29 × 21
» 3 Musique	36 × 26
» 4 Ministre	32 × 22
» 5 In-8° Jésus	28 × 18
» 6 Journal illustré, etc..	40 × 28
» 7 Quadrille	28 × 36
» 8 Traite Mandat	13 × 29
» 9 Journaux illustrés gr ^d format	46 × 33

I. F.

PARIS, LONDON

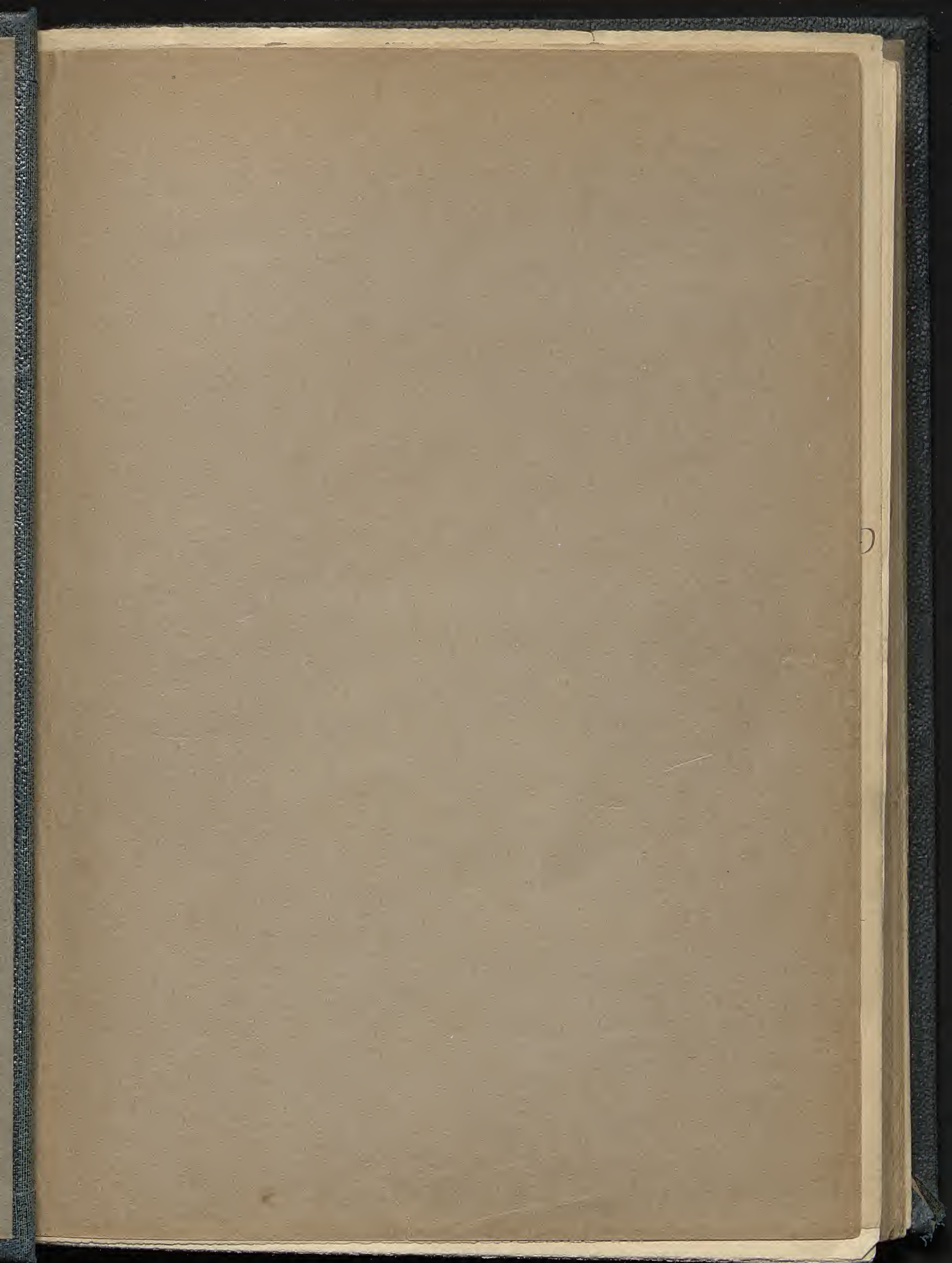
PATENT

Spécialité d'Articles anglais pour Bureaux

N° 1

Toute reliure non revêtue de la signature ci-dessous
 n'est pas la véritable reliure électrique

I. F. Frank





Cours de Philosophie des Sciences.

I. Mathématiques pures.

1897-1898

(Caen).

~~Russell~~ - Mach - Schröder.

~~Mach~~ : Thermodynamique Cantor.

~~Mach~~ : Mécanique Peano.

Portuondo : Infini. Vailati.

Appell : Potentiel. Halsted.

Notes de Math. et de Physique



Ms 128

I. Science du nombre: 1. Théorie nominaliste.

2. Théorie rationaliste.

Méthode: principe de l'induction complète.

Opérations primitives de l'arithmétique. Fondement
des combinaisons de nombres; L'intuition.

Systèmes de numération; opérations pratiques.

Problèmes d'arithmétique; algèbre indéterminée.

Théorie des nombres congruents.

Arithmétique générale: généralisation du nombre

Nombres complexes à n dimensions.

II Science de l'ordre: Théorie des ensembles. (Espace de l'ordre)

Nombres ordinaux et cardinaux de Cantor.

Ensembles dérivés. Le continu numérique

Nombres figurés. Théorie des permutations, arrangements et
combinaisons. ~~Nombres~~ Binôme. Déterminants.

~~Théorie des substitutions.~~

Théorie des chances; calcul des probabilités.

Théorie des suites, ~~et~~ séries et produits infinis.

Nombres figurés. Convergence; Limite.

III Science de la grandeur: Arithmétique de la mesure des gr.

Théorie des fonctions. Dérivées et différentielles.

Quadratures, intégrales. Equations diff. & aux diff. part.

Algèbre: méthode; équations; substitutions.

Etude du polynôme entier (analogie avec n entiers)

Formes algébriques. Invariants (Clebsch)

Nombres algébriques; ~~non~~ idéaux (Dedekind)

Le raisonnement mathématique est-il réductible au syllogisme?
Réserve pour la fin du cours l'étude des relations entre les
diverses branches de la Math. pour par ex. relations entre
Théorie des nombres, la th. des chances et celle du Fort et
ou le Calcul infinitésimal.

Question: L'idée de nombre et celle d'ordre représentent-elles
une intuition, comme + l'ordre de grandeur? Cela
expliquerait pourquoi les ^{lois} arith. miteques sont vrais
Géométrie (par ex. relations entre les nombres de faces, d'ar.
et de sommets des polyèdres; application des combinaisons
des probabilités à l'espace.)

Peut-être le nombre et l'ordre représentent-ils sur l'intuition
grandeur. Peut-être aussi peut-on construire la grandeur au
le nombre et l'ordre, avec des nombres ordonnés.

On réserve par conséquent pour la fin du cours la question des
relations de l'idée de nombre avec l'espace et le temps.

Expliquer pourquoi la Théorie des nombres a recours au l'Algèbre
et à la Géométrie, c'est-à-dire au nombre généralisé, à l'ordre et à la grandeur.

Pourquoi la question de méthode a-t-elle été négligée? C'est que
Math. elle-même est une méthode, une Logique, un Organon.

D'autre part (même la même raison) la question n'est pas
nécessaire pas: car il n'y a jamais question de la Math. sans objet.

L'idée d'ordre est indépendante de l'espace et du temps: ainsi une perle
n'a pas d'ordre sans être sensible à un objet, mais une simple correspon.
entre les objets et leurs places (disposés d'une manière quelconque).

Leçon d'ouverture.

1

Rapports traditionnels de la philosophie et des sciences :

Thalès, Pythagore, Platon; Descartes, Leibnitz, Kant.

- Divorce avec Cousin les sensualistes du XVIII^e s. les idéologues et Cousin. D'où positivisme. La science maint la philosophie stérile en philosophie. La philosophie ne serait que l'ensemble des vérités les plus générales des sciences.
Admettons ce point de départ.

La 1^{re} question qui se pose est celle de la méthode; comment conduire son esprit pour arriver à la vérité dans les sciences? Cette question n'est relative à aucune science particulière: car le savant applique inconsciemment les méthodes; quand il réfléchit sur elles, il n'étudie plus la nature, mais l'esprit; il fait œuvre de philosophe. D'où la Logique. Si Elle diffère de la logique classique, c'est que celle-ci n'est que la logique de Aristote, n'a de valeur scientifique que dans son système (où les qualités ^{chose} s'expliquent par des combinaisons de qualités ^{simples} réelles.) Le syllogisme n'a plus d'utilité dans les sciences; mais seulement dans la morale et le droit, où les concepts gardent leur valeur.

2^e question: L'étude des méthodes conduit aux principes et aux concepts fondamentaux des sciences; or ces principes et concepts, la science les postule, et ne les explique ni ne les fonde. Rechercher leur valeur, leur origine, est l'œuvre de la Critique. La question critique par excellence est celle-ci: Pour la part de l'a priori et de l'a posteriori dans la connaissance. Elle aboutit à une Théorie de la connaissance. Elle m

Ces systèmes usurpent en vain l'autorité de la science : la vraie science est idéaliste ; c'est elle qui en dépossédant les corps de leurs qualités sensibles nous oblige à renouer au réalisme naïf de vulgaire et à nous demander ce qu'ils sont en eux-mêmes. Elle dissout même le concept de matière, et ruine par suite le matérialisme des faux savants.

Elle ~~estricit~~ ^{don de réduire} au contraire la conscience au cerveau, elle lie ~~estricit~~ ^{don de réduire} des dispositions du monde sensible ; elle transporte le mystère de la nature en le transportant dans l'esprit. Qu'on se la pensive, elle témoigne de la réalité, et fait prouver que toute autre réalité procède de celle-là. (1)
 Loin de supprimer les problèmes philosophiques, c'est elle qui les pose : la philosophie n'est pas une science opposée à la science et rivale, base science de l'esprit à côté de la science des corps ; elle se superpose à la science, et y trouve son plus solide fondement.

(2) Mécanisme de ces 3 Parties, et surtout de la Critique, qui doit même servir de base à la Logique. Sans elle, la philosophie n'est qu'un amas de généralités. Sans elle, la logique reste vague, comme dans le positivisme : ~~ensemble de généralités~~ ^{ensemble de généralités} Science propre, résumé encyclopédique des sciences ; et la Métaphysique est vaine, comme dans le révolutionnisme, qui généralise sans critiquer les lois ou hypothèses ; mécanisme universel ; princ. de la cons. de l'énergie ; théorie de l'évolution, toute pour la vie, hérédité.

(3) L'esprit qui pense ne peut se connaître par l'introspection, car il se transforme alors en objet ; d'ailleurs, ses procédés sont incourciés. Il ne peut se connaître que par réflexion dans ses œuvres ; c'est pourquoi la philosophie est une réflexion sur la science.

Première leçon ^{C'est par}

Définir les mathématiques pures, ~~et~~ au sens kantien :
pur = a priori qui ne contient rien d'empirique.

C'est par le sens traditionnel des mathématiciens, qui prenaient pur pour synonyme de rationnel, et l'opposaient à l'empirisme : la Géométrie et la Mécanique d'aint des math. pures. — Les mathématiciens modernes sont revenus sur cette classification : ils considèrent la G. et la M. comme des sciences expérimentales, et réduisent les Math. pures à l'analyse. Peut-être vont-ils trop loin, et méconnaissent-ils la part d'a priori dans ces sciences, qui autrement ne seraient plus math. mais physiques. En tout cas, la G. et la M. reposent sur l'intuition de l'espace et du temps ; que cette intuition soit empirique ou a priori, elle suffit à distinguer ces sciences des Math. purement rationnelles, qui sont évidemment plus simples, plus abstraites et plus générales.

Celles-ci ont pour objet 3 idées fondamentales : le nombre, l'ordre et la grandeur. Les mathématiciens modernes croient pouvoir les réduire à une seule : le nombre, mais c'est là une conception philosophique qu'on discutera plus tard. Renvoyer à la fin du cours la question de savoir si ces 3 idées sont irréductibles : si, dans le cas où elles sont seraient indépendantes, elles ont la même importance et la même généralité ; et dans le cas contraire, lesquelles doivent se réduire aux autres. Ce sera la conclusion naturelle du cours.

Théorie nominaliste du nombre (d'après le mathématicien B.

Heimholtz, Kronecker, Dedekind

Système de nombres ordinaux, c'est-à-dire signes ou numéros des

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ tous différents (sans qu'on en

Sans unique Définition de l'égalité et de l'inégalité. Cette suite doit être illimitée, pour pouvoir s'appliquer à toutes les collections possibles de objets. Comme la mémoire ne pouvant retenir un trop grand nombre de signes, on a adopté la règle de combinaison progressive: $\alpha\alpha, \alpha\beta, \alpha\gamma, \dots$
 $\beta\alpha, \beta\beta, \beta\gamma, \dots$

Définition de l'égalité et de l'inégalité (supérieur, inférieur)

Sans unique Définition de l'addition: $\alpha + \beta = \gamma$ si α et β sont de même ordre que γ et α précède β dans la suite normale.

Sans unique En vertu de l'ordre même de la suite normale, à chaque nombre α correspond un nombre suivant qu'on désignera par α' . (L'inverse n'est pas vrai: 1 n'est précédé de aucun nombre.) C'est même en cela que consiste l'infinité de la suite A. Induction complète: elle se reproduit tout entière par substitution de α' à α .

Définition de l'addition (Dedekind) $\alpha + 1 = \alpha'$
 $(\alpha + n)' = \alpha + n'$
ou $(\alpha + n) + 1 = \alpha + (n + 1)$

On peut illustrer cette définition par la correspondance de

a', a'', a''', \dots, c $c = a + b$
 $1, 2, 3, \dots, b$

Le théorème de Grassmann: $(a+b)+1 = a+(b+1)$
ou dit: 2^o La loi associative: $(a+b)+c = a+(b+c)$
par induction complète: A. Elle est vraie pour $c=1$;

B. So elle est vraie pour n , elle est vraie pour $(n+1)$.

~~$(a+b)+n = a+(b+n)$~~ | ~~$(a+b)+(n+1) = a+(b+n+1)$~~

So elle est vraie pour $c=n$, elle l'est pour $c=n+1$;

~~$(a+b)+n = a+(b+n)$~~ | ~~$(a+b)+(n+1) = (a+b+n)+1$~~

Hypothèse: $(a+b)+n = a+(b+n)$

Thèse: $(a+b)+(n+1) = a+(b+(n+1))$

~~$(a+b+n)+1 = a+(b+n+1)$~~

$(a+b)+(n+1) = (a+b+n)+1$

$(a+b+n)+1 = a+(b+n)+1$

$a+(b+n)+1 = a+(b+n+1)$

$a+(b+n+1) = a+(b+(n+1))$

Loi commutative: $a+1 = 1+a$.

A vrai pour $a=1$; B: si elle est vraie pour $a=n$, elle l'est pour $a=n+1$.

$n+1 = 1+n$ $(n+1)+1 = (1+n)+1 = 1+(n+1)$

$(n+1)+1 = 1+(n+1)$ $(n+1)+1 = (1+n)+1 = 1+(n+1)$

$a+b = b+a$

A Vrai pour $b=1$; B: si elle est vraie pour $b=n$, elle l'est pour $b=n+1$.

$a+n = n+a$

Th. $a+(n+1) = (n+1)+a$

$a+(n+1) = (a+n)+1$

$(a+n)+1 = (n+a)+1$

$(n+a)+1 = n+(a+1)$

$n+(a+1) = n+(1+a)$

$n+(1+a) = (n+1)+a$

Loi associative et commutative généralisées.

Définition de la multiplication:

$a \times 1 = a$

$a \times (n+1) = a \times n + a$

$a \times 1 = 1 \times a$

$(n+1) \times 1 = 1 \times (n+1)$

$(n+1) \times 1 = 1 \times (n+1)$

3° Loi associative: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Vrai pour $c = 1$: $(a \times b) \times 1 = a \times (b \times 1)$

Si elle est vraie pour $c = n$, elle l'est pour $c = n + 1$:

$$(a \times b) \times n = a \times (b \times n) \quad (a \times b) \times (n + 1) = a \times [b \times (n + 1)]$$

Même démonstration que pour l'addition.

$$(ab)n = a(bn) \quad (ab)(n+1) = (abn)1 = [a(bn)]1 = a[(bn)1] = a(b(n+1))$$

1° Loi distributive par rapport à l'addition:

$$(a + b)c = ac + bc$$

Vrai pour $c = 1$: $(a + b) \times 1 = a \times 1 + b \times 1$ (=)

Si elle est vraie pour $c = n$, elle l'est pour $c = n + 1$:

$$(a + b)n = an + bn \quad (a + b)(n + 1) = a(n + 1) + b(n + 1)$$

$$(a + b)(n + 1) = (a + b)n + (a + b) = an + bn + (a + b) = an + a + bn + b = a(n + 1) + b(n + 1)$$

Définition de la puissance: $\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n \times a \end{cases}$

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad a^m \times b^m = (ab)^m$$

Cette théorie fonde toute la science des nombres sur l'idée des unités. Elle est pas une seule fois question du nombre cardinal: c'est pourquoi l'on m'a défini par l'addition: ajouter n unités à un nombre; la multiplication: répéter n fois un nombre; la puissance: prendre n nombres égaux. Toutes les opérations se réduisent à ces combinaisons un peu désignées; on s'est définies que par leurs propriétés. Tout repose sur le lien établi entre chaque nombre et le suivant. Reste à savoir comment le nombre cardinal se conçoit et s'applique dans cette théorie.

2° Loi commutative de la multiplication: $a \times b = b \times a$
 Vrai pour $b = 1$; si elle est vraie pour $b = n$, elle l'est pour $b = n + 1$:
 Hp: $an = na$
 Th: $a(n + 1) = (n + 1)a$ $a(n + 1) = an + a$ (en vertu de la loi distributive)
 $(n + 1)a = an + a$

2^e leçon

9

Definition du nombre cardinal dans la théorie ordinale.

Pour énumérer une collection donnée, on applique à chacun de ses éléments ~~le~~ un nombre ordinal ~~dans l'ordre normal~~ ^{suivant}.

Le dernier des nombres employés n , est le nombre cardinal de la collection. (~~Definition cardinal de l'addition coïncide avec la definition~~ ^{ordinale}.)

C'est en même temps le nombre des nombres employés.

Il faut démontrer alors que le nombre cardinal d'une collection donnée est indépendant de l'ordre assigné aux éléments dans l'énumération. Postulat de l'invariance du nombre cardinal (Schröder)

Démonstration de Kronecker: On prend les nombres déjà employés, on intervertit leur ordre et on les applique de nouveau aux mêmes objets disposés dans le même ordre. Comme l'ensemble des nombres employés n'a pas changé, le nombre des objets numérotés est le même.

Réfutation: 1^o On suppose que le nombre des nombres employés reste le même quand on change leur ordre: or leur nombre cardinal n est relatif à leur ordre, puisque c'est le dernier d'entre eux: ~~on suppose on implique~~ il faudrait donc que la théorie fût démonstrée d'abord pour les nombres eux-mêmes, c.à.d. que les nombres de 1 à n , pris dans un ordre quelconque, correspondent encore aux nombres de 1 à n dans l'ordre normal.

2^o On suppose que l'ensemble des nombres employés n'a pas changé: cela ne serait vrai que si chaque nombre correspondait encore au même objet, ce qui est contraire à la hypothèse. Disait-on qu'on les applique dans leur ordre numérique (de 1 à n) mais dans quel ordre des objets? Mais alors rien ne prouve que la répartition s'effectue sans omission ni répétition. Au fond, on suppose que le nombre des objets reste le même entre les 2 opérations: on implique une ~~idée~~ ^{idée} de nombre cardinal, ~~congrue~~ ^{congrue} à la définition.

Démonstration de Helmholtz. La suite normale des nombres restant fixe, on y applique la collection donnée, de 1 à n ; par là même, on lui assigne un ordre, et elle a le nombre n pour cet ordre. Soit un autre ordre quelconque: la collection couvrira-t-elle encore les mêmes nombres ordinaux? (Prenez des lettres)

1° On peut permuter 2 lettres quelconques sans changer le nombre cardinal de la collection: car chaque lettre correspond à un nombre ordinal qui était couvert antérieurement; ou bien a pas découvert, ni couvert un nouveau. Et la collection est restée identique à elle-même.

2° Par des permutations successives de 2 lettres on peut passer d'un ordre donné à un autre ordre donné quelconque. En effet, on amènera successivement le 1^{er}, le 2^e, le 3^e ^{élément} à leur rang. Après un nombre fini de permutations, il en restera plus que le $(n-1)^e$ et le n^e , qu'on amènera à leur place, il y a lieu par une dernière permutation. (Helmholtz se restreint aux permutations de 2 lettres voisines, ce qui n'est pas nécessaire.)

Remarque. Cette démonstration suppose que la collection est finie, c'est-à-dire qu'elle a un dernier élément. Selon Helmholtz, cette démonstration ne fait pas appel à l'expérience externe comme la définition cardinale de l'addition; elle repose sur l'intuition interne. Et en effet, il fait 2 fois appel à l'intuition: 1° pour prouver que le nombre ne change pas quand on permute 2 éléments; 2° pour prouver que l'on peut passer d'un ordre à un autre par une suite de permutations. [Bromwich fait appel à l'intuition d'une manière bien plus flagrante, pour les lois commutatives de l'addition et de la multiplication.] Au fond, il ramène sa démonstration à la constatation interne du théorème pour $n=2$: le nombre de 2 objets ne change pas quand on les permute. Pourquoi? Est-ce un fait d'expérience interne?

D'autre part, cette démonstration repose sur l'idée de unité, et sur l'évidente des unités (les objets ne doivent pas s'incruster ni se doubler, ni disparaître). La réduction des objets à des unités est déjà impliquée dans la correspondance univoque (un à un) des objets aux nombres. Les nombres eux-mêmes, simples signes d'ordre, sont conçus chacun comme unité; et par suite l'ensemble des nombres ~~ordinaires~~ la définition ordinaire de l'addition suppose qu'on les applique un à un. L'idée de unité se trouve ^{déjà} impliquée dans la définition même de la suite normale: car à chaque nombre correspond un suivant, et un seul (sans quoi la suite ne serait pas linéaire). Bien mieux: il faut qu'il y ait un premier nombre, et par conséquent le ~~chiffre 1~~ signifie ~~un~~ premier nombre est un.

Autre définition du nombre cardinal (Stolz, Dedekind)

On part de la notion de pluralité ou d'ensemble. On définit: pluralités équivalentes celles entre lesquelles on peut établir une correspondance univoque et réciproque (l'élément à l'élément.)

On range toutes les pluralités équivalentes dans une seule classe: on remarque qu'elles sont équivalentes à la suite des nombres ordinaux de 1 à n ; cette suite étant définie par le dernier nombre n , celui-ci est pris pour représentant de la classe, et est le nombre cardinal de tous les ensembles de la classe. — On lui fait correspondre chaque classe à un ensemble de signes 1 (pluralité d'unités, Stolz.)

Mais tout cela cache une pétition de principe: toute correspondance suppose que l'on attribue l'unité aux éléments qu'on fait correspondre. Or si l'on conçoit une

l'énombrement suppose donc qu'on réduit par la puissance la collection à une pluralité d'unités, c'est-à-dire à son nombre. Si le nombre est antérieur au dénombrement.

collection donnée comme une pluralité d'unités, on en conçoit ipso facto le nombre, on la conçoit comme nombre. Un ensemble de nombres ordinaires ou de chiffres 1 n'est un nombre qu'à cette condition: il est donc inutile de les employer à définir le nombre, car il y est insupplé d'avance.

Le nombre n'est donc pas le produit d'une abstraction portant sur plusieurs collections équivalentes: — ni d'une abstraction portant sur les éléments d'une collection. ^{Elle n'est pas} ~~donnée~~ ^{Elle n'est pas} une qualité des choses, donnée dans la perception sensible; elle est interprétée et imposée plus ou moins arbitrairement par l'esprit. Elle naît du acte de penser chaque chose à part.

— L'unité doit aussi être appliquée à la collection entière, pour la totaliser; c'est elle qui unit les unités et transforme la pluralité en nombre. Cette application de l'unité n'est pas plus arbitraire que la 1^{re}: les unités constitutives du nombre sont toujours complètes. Le nombre est l'unité d'une pluralité d'unités.

— Il est indépendant de l'ordre des unités, et ne suppose même pas qu'elles en ont un: d'où l'invariance évidente du nombre cardinal.

Il est aussi indépendant des autres nombres: les nombres n'ont pas par eux-mêmes aucun ordre: chacun existe à part, en lui-même. Le nombre ne doit pas être défini une somme d'unités: car cela suppose l'idée d'addition, qui pré suppose l'idée même de nombre. De plus, pour sommer les unités intégrantes d'un nombre, il faudrait savoir combien en prendre, c'est-à-dire connaître le nombre.

— On peut néanmoins, non pas construire les nombres, mais les exprimer en adoptant la loi de formation par addition de l'unité à elle-même. Le nombre un n'est pas l'unité: c'est elle qui ne comprend qu'une unité.

— On peut dire alors que chaque nombre est la somme du précédent et d'une unité, mais dans un sens tout différent que dans la théorie ordinaire.

On retrouve ainsi la suite vraiment naturelle des nombres, point de départ de la th. ordinaire. Reste à définir les opérations.

Le principe de l'induction complète conduit donc la valeur dans notre

$$100aa' + 200a' + 10(ab' + b' + a'b) + b'b'$$

$$ab' > a'(10 - b)$$

$$100aa' + 200a' > \frac{100a'}{10} > \frac{ab' + a'b}{10}$$

$$100aa' + 10(ab' + a'b) + b'b'$$

$$10a + b$$

$$10a' + b'$$

$$2a(b - 10) > 10$$

$$2ab > 20a$$

Monsieur et Cher Camarade,

$$2ab > 20a + 10$$

$$20ab > 100(2a + 1)$$

J'ai l'honneur de vous annoncer

le 14

$$\begin{array}{r} 681 \\ 1086 \\ 1701 \\ 801 \end{array}$$

L'ordre introduit dans le dénombrement
n'est nullement inhérent à l'idée du nombre ob-
jet le moyen le plus pratique des'assurer qu'on
ne commet ni omission ni répétition. C'est
sans doute le meilleur moyen de former sans erreur
le nom de nombre cherché (en énumérant
tous les précédents.) Mais on peut aussi con-
siderer les objets deux par deux, trois par trois, &c.
et les mettre eux-mêmes en un ordre non linéaire.

— Ce qui fait que l'on distingue pratiquement les opérations
l'algorithme; ainsi l'addition aux puissances
distingue par de la multiplication, ~~l'addition~~ ^{l'addition} ~~qui est de la~~
racine se distingue de la division. La multiplication
se ramène à une addition répétée, et la
soustraction répétée.

L'idée de nombre est antérieure au dénombrement. A
 quel point s'en est-il élevé? A trouver le nom du nombre
 déjà perçu ou du moins implicitement déterminé, et
 sa représentation en chiffres. Or la numération, parlée
 et écrite, suppose non seulement la notion de nombre,
 mais la connaissance des opérations fondamentales.
 Il faut donc définir ces opérations avant toute numération.

Reprenons les formules qui les définissent de la th. ordinaire:

$$\begin{array}{c|c|c} a+1=a' & a \times 1=a & a^1=a \\ a+(n+1)=(a+n)+1 & a(n+1)=an+a & a^{n+1}=a^n \times a \end{array}$$

et d'où l'on a déduit les formules générales:

$$\begin{array}{c|c|c} a+b=b+a & a \cdot b=b \cdot a & a^b \cdot a^c=a^{b+c} \\ a+(b+c)=(a+b)+c & (a \cdot b) \cdot c=a(b \cdot c) & (a^b)^c=a^{bc} \\ (a+b) \cdot c=ac+bc & (a \cdot b)^c=a^c \cdot b^c & \end{array}$$

Les formules fondamentales se justifient de la th. cardinale:
 car nous avons retrouvé la suite naturelle des nombres, mais
 avec un autre sens: au lieu de définir $(a+1)$ par le nombre
 qui suit a , nous ^{rangeons} ~~plaçons~~ après a la somme de a et de 1.
 La somme de plusieurs nombres est la ~~nombre~~ collection de
 toutes les unités qui constituent ces nombres. Cette définition
 étant indépendante de l'ordre des nombres composants, les lois
 commutative et associative deviennent évidentes. Comme
 l'idée de nombre ^{de l'addition} repose sur l'idée de collection.
 Ce n'est pas une collection de nombres, mais de unités: aussi faut-il
 décomposer les nombres à sommer et réunir leurs unités dans
 une nouvelle synthèse, en former une nouvelle unité (Kant).
 + Identité avec la définition ordinaire. On peut en démontrer
 la loi commutative au moyen de l'invariance du nombre card

Définition de l'inégalité. Deux nombres égaux sont égaux
on s'en assure par la correspondance univoque et réciproque. (N.B.)
Si la correspondance une fois établie, (c'est un critérium, non une défini-
tion) il reste des unités de l'une des collections, c'est elle qui aura le plus
grand nombre. Il est évident que ce nombre est la somme du plus
petit et d'un autre, composé des unités restantes: c'est la différence
ou l'excès. Ainsi deux nombres inégaux ont une différence.
~~Réciproque:~~ ~~Conséquence:~~ en deux nombres qui ont une différence sont inégaux.
N.B.: Il ne faut pas prendre cette théorie pour définir l'inégalité.
Conséquence: De deux nombres inégaux, le plus grand vient
après l'autre dans la suite naturelle. On retrouve ainsi la
définition ordinaire de l'inégalité.

Définition de la multiplication. Le produit de a par b
est la somme de b nombres égaux à a . La loi commutative
n'est pas évidente, les 2 facteurs jouant pas un rôle symétrique.
Mais les 2 formules fondam. se déduisent de cette définition.
Démonstration intuitive de la loi commutative, par Cournot.
on prend 1 unité à chacun des nombres a , on forme 1 nombre b ;
comme l'opération se répète a fois, on obtient a nombres b .
Ce raisonnement repose sur une intuition d'ordre (non de space).

En tout cas les lois de la mult. se déduisent des 2 formules fon-
Définition de la puissance. La puissance n^{e} du nombre a
est le produit de n nombres égaux à a . On retrouve ainsi les 2
formules caractéristiques de l'élévation aux puissances.

Ainsi toutes les définitions formelles et nominales dérivent
des axiomes déduits des définitions réelles. Ce ne sont plus des
conventions arbitraires, mais des règles fondées sur la nature
des idées.

Au fond, il n'y a qu'une opération primitive et originale, l'addition : les autres sont ~~de~~ ^{considérées} raménées à des cas spéciaux et compliqués de l'addition. Un produit n'est pas une combinaison de deux facteurs, mais une somme de nombres égaux. Le multiplicateur et l'exposant jouent le rôle de indices d'opération : ils indiquent combien de fois et font la répétition (sens cardinal). Les produits et puissances ne sont que des notations abrégées d'additions. Pourquoi les considérer-on comme des combinaisons nouvelles ? C'est parce qu'on les considère comme fonctions des mult^{ieurs} et exposants. Pour le mult^{ier}, cela va de soi, en vertu de la loi commutative : le produit est une fonction symétrique des 2 facteurs. Pour l'exposant, cela est plus tard (Descartes) : quand on a conçu l'exposant ^{de la puissance} comme variable : la fonction puissance est devenue la fonction exponentielle. ~~Exemple de b~~ Mais ce sont là des considérations de l'Analyse.

Opérations inverses. Il n'y a qu'une opération inverse primitive, la partition, inverse de l'addition : on peut décomposer un nombre en plusieurs dont il est la somme. Opération indéterminée.

Cas particulier : On assigne l'un des parties, on demande l'autre.

C'est la soustraction, op. inverse de l'addition ordonnée (car elle implique un ordre de sommation). Elle est univoque, comme

l'addition : $b + x = a$ (Si $b + y = a$, $y = x + n$, $b + (x + n) = (b + x) + n$)

Mais non commutative : Si $x = a - b$ existe, $(b - a)$

n'existe pas : la différence de 2 n'embrasse du plus gr. sur le plus petit.

Si l'on répète la soustraction, 2 cas se présentent : ou bien l'on épuise exactement le plus gr. nombre, alors il est la somme de n nombres b ~~est~~ ^{est} bn ; n indique combien de fois a contient b ; c'est le quotient. Ou bien il reste une différence ^(exactement) moindre que b :

Alors: $a = bq + r$ q quotient approché, indique
combien de fois au plus a contient b . C'est la division.
Remarque: La division n'est l'inverse de la multiplication
que dans le cas: c'est pourquoi nous avons préféré la définir
comme une soustraction répétée. Le symbole $\frac{a}{b}$ n'a de sens
que dans le cas où: $a = bx$, alors: $x = \frac{a}{b}$.

La division est unique comme la multiplication.

— L'élevation aux puissances n'étant pas commutative,
comporte 2 opérations inverses: racine $\sqrt[n]{a}$ et logarithme.
Mais ces opérations ne sont possibles que par exception. Aussi
ces opérations appartiennent moins à l'arithm. qu'à l'analyse.

Solution de la question: Les jugements arithmétiques
sont-ils analytiques ou synthétiques? Ex: $2 + 3 = 5$.
Étant posés les définitions, Sont analytiques, car:

$$1+1=2, \quad 2+1=3, \quad 3+1=4, \quad 4+1=5,$$
$$2+3 = 2+(2+1) = (2+2)+1 = [2+(1+1)]+1 = ((2+1)+1)+1 = (3+1)+1 = 4+1 = 5. \quad (\text{au moyen des axiomes.})$$

Cela est vrai si l'on définit les nombres par addition de 1 à 1.
Mais si les nombres sont indépendants les uns des autres, et
ne peuvent se définir par la somme de leurs unités (car
il faudrait savoir combien d'unités à additionner: Cantor.)
les jugements: $1+1=2$, etc. sont des vérités synthétiques,
des ~~théorèmes~~ fondés sur des actes synthétiques de l'esprit: par
exemple, il faut une synthèse pour apercevoir: $4+1=5$ comme
pour apercevoir: $2+3=5$, ou $3+2=5$. L'approch
ment des concepts ne produit rien: il faut les construire dans
l'intuition, c'à-d. poser ~~les~~ a par les unités constitutives,
les dissocier & les unir. C'est une synthèse idéale ou imaginaire,
qui n'a besoin que de l'intuition interne, non de l'externe (expérience).

Autres considérations sur la question.

Les jugements analytiques arithmétiques sont-ils analytiques ou synthétiques ?

Admettons qu'on puisse démontrer analytiquement :

$$2 + 3 = 5$$

en écrivant, $2 + (1 + 1 + 1) = 5$.

Il faut pour cela remarquer que :

$$1 + 1 + 1 = 3.$$

Or cela ne peut se constater que par intuition (cela est encore plus sensible pour des nombres plus grands). Il n'y a donc que l'intuition qui nous garantit l'identité de nombre. 3 écrit deux fois sous la forme $1 + 1 + 1$ qu'on ajoute à 2 les 3 unités ensemble ou successivement, toujours faut-il qu'à un moment donné on aperçoive leur trinité. Au fond la prétendue démonstration logique (analytique) revient à juxtaposer aux unités qui constituent le nombre 2 les unités qui constituent le nombre 3, et à voir le nombre 5 formé par leur réunion.

$$(1 + 1) + (1 + 1 + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Encore un fois, c'est l'intuition seule qui nous garantit qu'il y a le même nombre d'unités dans les 2 membres. C'est comme si j'approchais 2 bâtons et 3 bâtons :

$\begin{array}{ccc} \text{II} & & \text{III} \\ \hline \text{IIIIII} \end{array}$



Remarque. Cela confirme ce que nous disons
ailleurs ; que le nombre ne peut être défini
comme somme d'unités. Sans doute, la
synthèse des unités dans le nombre est ana-
logue à la synthèse des nombres dans leur
somme ; mais elle est antérieure & plus simple.
L'addition est une synthèse du 2^d degré, une
synthèse de synthèses. Ou plutôt, elle suppose
la destruction des synthèses antérieures pour
rendre possible une synthèse nouvelle. On
détruit en effet sorte les unités de 2 et celles
de 3, on les confond avec les unités pour
en faire les unités du nouveau nombre (5.)

12 juin 1899.

Numeration : vient du besoin de représenter les nombres (comme toutes les idées) par des signes. Est à l'arithmétique ce que le langage est à la pensée, la Grammaire à la Logique. Le signe naturel d'un ~~nombre~~ ^{cette} est une collection concrète ayant ce nombre. On emploie de préférence des objets semblables (jetons, boules, monnaies) à l'image de l'unité : car il faut que l'unité de chaque objet soit distincte et permanente.

Signes oraux : répétition de un, un, un, Signes écrits : série de bâtons, de ronds, de points, etc. En fait, le bâton est l'origine de la numération romaine, et du chiffre 1. Pas pratique.

Signes conventionnels : chaque nombre aurait son chiffre et son nom. Impossible : il en faudrait une infinité. Comment représenter l'infini des nombres par un nombre fini de signes ?

On pourrait ^{adopter} ~~choisir~~ des nombres de plus en plus grands : P, Q, R... comme unités d'ordre supérieur ; dire combien de fois le nombre donné contient P, Q, R... et indiquer le reste.

Il est plus commode de choisir pour P, Q, R... des multiples, de telle sorte que Q contienne q fois P, R r fois Q, etc. ^{ou par exemple}

Mais le plus simple est de choisir P, Q, R... de telle sorte que leur ^{quotient} ~~rapport~~ soit le même : $q = r = \dots$ (progression géométrique).

Si de plus on fait : $r = q = P$, toutes les unités d'ordre supérieur seront les puissances successives d'un seul nombre P, ce qui est le comble de la simplicité. - Ainsi la numération repose tout entière sur la possibilité de prendre un nombre pour unité d'un nouveau nombre, et de former ainsi des nombres de nombres ou ensembles d'ensembles (produits). Le nombre P est la base du système de numération. Pour construire la suite naturelle des nombres, ce plutôt de leurs signes

(oraux ou écrits) on n'emploie que P nombres: $1, 2, 3, \dots, P$.
Puis on ajoute l'unité à P : $P+1, P+2, \dots, P+P$.

$2P, \dots, 3P, \dots, (P-1)P, PP = P^2$ etc.
On continue ainsi indéfiniment; la suite naturelle, primitive & uniforme, est ainsi partagée par étapes successives ayant pour base une nouvelle puissance de P , à laquelle on ajoute tous les nombres antérieurement formés. La forme générale d'un nombre est:

$$a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_2 P^2 + a_1 P + a_0$$

Inversement, pour exprimer un nombre donné N , on le divise par la base P : soit q_1 le quotient, a_0 le reste; on divise q_1 par P ; q_2, a_1 ; etc. on ~~obtient~~ ^{arrive} jusqu'au quot. $q_n = a_n$ qui $< P$.
on obtient N sous la forme: $N = a_0 + a_1 P + \dots + a_{n-1} P^{n-1} + a_n P^n$
($N = a_0 + P(a_1 + P(a_2 + P(\dots)))$) ($a_0, a_1, \dots, a_n < P$).

~~L'écriture~~ On énonce le nombre en indiquant le nombre des unités de chaque ordre qu'il contient. — Pour l'écrire, on pourrait adopter un signe pour marquer les unités de chaque ordre, mais elles sont marquées par le reste même des quot. part. a_0, \dots, a_n .
On se contente de les écrire dans cet ordre: a_n, \dots, a_0 .

Seulement, il faut se faire que certaines divisions se fassent sans reste: alors le terme correspondant manque. Pour indiquer une colonne vide, et tenir sa place de manière que les autres gardent leur valeur, on invente le zéro, qui indique l'absence d'unités.
Ce n'est pas un nombre jusqu'ici, c'est un chiffre « négatif » qui représente le rien de nombre. Chiffres significatifs.

Puis suite: $P=10, P^2=100, \dots, P^n=1$ avec n zéros.

Ainsi la numération implique l'addition, la multiplication & l'élevation aux puissances, et même la division. Ce qui prouve bien qu'elle a engendré par l'idée des nombres, mais la suppose préformée. Elle a engendré même par la suite naturelle: elle en est une représentation symbolique & systématique.

Caractère artificiel de la numération: ~~Elle provient par~~
~~la composition du nombre, d'autres représentations symboliques~~
 Sur la numération systématique (décimale) sont fondées les
 règles ~~de pratique~~ ^{théoriques} des opérations pratiques (bien distinctes des
 opérations ou combinaisons ~~théoriques~~ ^{théoriques} des nombres, antérieures
 à tout système de numération.) En effet, ces règles reposent sur
 les propriétés caractéristiques des opérations théoriques.

Ainsi l'addition, en vertu des lois associative et commutative,
 peut se faire ~~comme~~ s'effectuer suivant la formule:

$$A+B = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)X + (a_2+b_2)X^2 + \dots + (a_n+b_n)X^n$$

avec cette condition que, si $a_k + b_k > X$, on divise par X ,
 on pose le reste, et on retient le quotient pour le ajouter à
 $a_{k+1} + b_{k+1}$. De même pour plusieurs nombres.

La soustraction, en vertu de la loi associative, s'effectue comme suit:

$$A-B = (a_0-b_0) + (a_1-b_1)X + \dots + (a_n-b_n)X^n$$

avec cette condition, que si $a_k < b_k$, on ajoute X à a_k ,
 et on le retranche du terme suivant, c'est qu'on retranche 1
 au coefficient: $a_{k+1} - b_{k+1}$.

La multiplication (assoc distributive) s'effectue ainsi:

$$a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)X + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)X^2 + \dots + a_nb_nX^n$$

avec la même règle de réduction et de report des unités supérieures,
 toujours pour ramener le résultat à la forme normale.

La règle de division repose sur cette ~~remarque~~ ^{remarque} mise en évidence
 par la formule précédente, que le terme le plus élevé du produit
 est le produit des termes le plus élevés des facteurs. C'est
 pourquoi on divise les prem. chiffres du dividende par le
 premier chiffre du diviseur pour obtenir le 1^{er} chiffre
 du quotient (quelquefois trop fort.)

Or si l'on remplace a par $a+1$, le 1^{er} terme $(= 100aa' + 10(ab'+a'b) + bb')$
 augmente de $100a'$. $10(ab'+a'b) > 100a'$
 $ab' + a'b > 10a'$ $ab' > a'(10-b)$
 possible.

L'élévation aux puissances n'a pas d'algorithme spécial.
 Sans doute parce que, faute des propriétés commutatives et associatives,
 on ne peut ramener l'opération à des opérations partielles plus
 l'extraction des racines a au contraire un algorithme propre:
 grâce au théorème: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 ou: $(10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$

qui prouve que le terme le plus élevé du carré est le carré du
 terme le plus élevé de la racine: $\begin{cases} 20ab > 100(2a+1) \\ 20ab > 200a & b > 10 \end{cases}$

[Tandis que pour la division: $100aa' + 10(ab' + ba') + bb'$, D'où la règle: $\begin{array}{r} 729 \quad 27 \quad \text{impossible} \\ 329 \quad 47 \end{array}$]

D'où aussi l'extraction de racine abrégée, $\begin{array}{r} 729 \quad 27 \quad \text{impossible} \\ 329 \quad 47 \end{array}$
 c'est la possibilité de calculer le reste de la racine quand on a
 au moins la moitié du chiffre.

Ainsi les algorithmes pratiques reposent sur des théorèmes de l'Arithmétique (et non de l'Algèbre).

Dans les opérations partielles, on est amené à poser les règles du calcul
 de zéro: $a \pm 0 = a$, $a \times 0 = 0$. Diviser par 0 n'a pas de sens.

Ces formules définissent les combinaisons de 0 avec les nombres,
 et tout un nombre caractérisé par ces propriétés.

Caractère artificiel de la numération: équivalent à toute autre
 représentation symbolique de nombres, par décomposition. Ceci
 est aussi bien représenté par 20×5 , 25×4 , $4 \times 5 \times 5$, que par 100
 c'est-à-dire 10×10 . Traces de représentation non systématique, dans la
 nomenclature: Soixante-dix, quatre-vingts, ... duodeviginti.

dans l'écriture: toute la numération romaine. IV, VII.

Enfin les opérations techniques n'ont pas d'autre résultat que de
 trouver la représentation systématique d'un nombre donné sous
 une autre forme de représentation symbolique. Avantage de la

numération: rend les nombres comparables aux devenus égalités, inégalités.
 Mais dissimule d'autres propriétés (divisibilité) qui met en évidence
 la décomposition en facteurs premiers (par pratique: nombre infini de signes
 premiers.)

Ce qui distingue les opérations pratiques, c'est l'existence d'un algorithme spécial; autrement, la multiplication se réduirait à l'addition comme l'élevation aux puissances se ramène à la multiplication. De même la division s'effectuerait par soustractions répétées; ce qui prouve bien qu'il n'y a que 2 opérations théoriques primitives, l'addition et la partition.

Le choix de la base est arbitraire, ce qui confirme le caractère conventionnel de la numération. Deux intérêts contraires: réduire le nombre des signes au minimum; réduire au minimum le nombre des chiffres d'un nombre donné. L¹^{er} intérêt est satisfait par le système binaire (chiffres 0 et 1). Le 2nd: Cumulus e nichilo ducendis sufficit unum. Les puissances de 2 sont: 10, 100, 1000, Un nombre est la somme de certaines puissances de 2 (et de 1). Ce système réduit la multiplication à l'addition, ce qui prouve le caractère artificiel et dérivé de cette opération.

Ex: $7 \times 5 = 35$: $111 \times 101 = 100011$.

Inconvénient: beaucoup de chiffres pour de petits nombres. Système duodécimal a l'avantage contraire; en outre, la base a beaucoup de diviseurs: 2, 3, 4, 6.

Suz. Comte préfère la base 7: maladroit (n. premier). Système décimal, après cela (raisons théologiques et fétichistes). Pour des raisons anthropologiques (doigts des 2 mains).

Sans la numération, on devrait recourir à l'intuition pour toute combinaison de nombres (intuition interne pour les petits nombres, externe pour les plus grands). La numération permet de ramener (grâce aux axiomes fondamentaux qui expriment les propriétés des opérations théoriques) les combinaisons de

nombres quelconques une combinaison des ~~(X-1)~~ premiers
 nombres d'un seul chiffre (au nombre de X, y compris Zéro).
~~Cette~~ Toutes les opérations pratiquées reposent sur la
 connaissance de la somme et du produit de ces nombres (1)
 (Soit $(X-1)(X-1)$ combinaisons) Ces combinaisons
 élémentaires, retenues par cœur, ne proviennent d'aucun
 calcul (2) Elles ~~reposent~~ sont connues par intuition. Ainsi la
 numération ramène les opérations à un petit nombre
 de intuitions : et ce nombre dépend du choix de la base
 ce qui prouve qu'il n'y a pas de bornes précises à la portée
 de la intuition arithmétique.

(1) Table de Pythagore pour la multiplication.

(2) Car il n'est pas évident que $7+8=15$, c'est $10+5$.
 Le nombre quinze est aussi bien représenté par $7+8$ que par
 $10+5$, et les 2 représentations sont également artificielles
 et dérivées. De même : $8 \times 5 = 40 = 10 \times 4$.

Cette égalité se vérifie par la proportion : $8 : 4 = 10 : 5$.

Nous possédons les bases logiques de l'arithmétique.
 Mais est-ce l'arithmétique, c'est-à-dire la science des nombres?
 Non ce sont des règles pratiques de calcul, une technique.
 Elles nous font connaître des faits de calcul, savoir la
 somme, la différence, le produit et le quotient de 2 nombres
 particuliers donnés. Mais une science se compose de lois
 générales. Analogie avec sciences physiques: les faits d'expé-
 rience sont remplacés par les faits de calcul, c'est-à-dire en dernière
 analyse par les faits d'intuition. Seulement l'induction
 physique ne suffit pas à ^{fonder} ~~fournir~~ les lois arithmétiques.
 (Elle peut les faire découvrir.) Exemples d'inductions fausses
 (on démontrera qu'aucune formule algébrique ne contient
 que des nombres premiers);

La formule: $x^2 + x + 17$ donne 17 n premiers de suite.

$$2x^2 + 29 \quad 29$$

$$x^2 + x + 41 \quad 40 \quad (x=0, 1, 2, \dots, 39) \quad (\text{Euler})$$

5. D'autre part, aucune loi générale ne peut être établie par une
 vérification complète, attendu qu'elle comprend une infinité
 de cas (!) C'est pourquoi la démonstration générale est nécessaire.
 Le plus souvent, elle s'effectue par le principe de l'induction
 complète. Si une proposition est vraie pour 1, et qu, si elle est
 vraie pour n , elle est encore vraie pour $n+1$, elle est vraie
 pour tous les nombres. On ^{montre} ~~peut~~ ^{montrer} le fait qu'elle est vraie pour
 1 (c'est un fait à constater) et on démontre quesi elle est vraie
 pour n , elle l'est pour $n+1$. Il y a donc toujours un fait à
 la base, comme point de départ de la progression (son récurrence).
 Cette induction rationnelle diffère de l'induction empirique par
 1) La vérification empirique peut montrer la fausseté d'une loi (car il
 suffit d'un seul cas) mais non établir sa vérité (car il faut tous les cas)

le caractère adéquat et la certitude apodictique de la conclusion.
Ex: La carré de la somme des n premiers nombres entiers est
égal à la somme de leurs cubes (Vrai pour $n=2$.)

$$(1+2+\dots+n)^2 = 1+2^3+\dots+n^3 \quad (\text{hypothèse})$$

$$[1+2+\dots+n+(n+1)]^2 = (1+\dots+n)^2 + 2(n+1)(1+\dots+n) + (n+1)^2$$

$$\text{Or: } 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc:

$$[1+2+\dots+n+(n+1)]^2 = 1+2^3+\dots+n^3 + \left[n(n+1)^2 + (n+1)^2 \right] + (n+1)^3 \quad \text{c. q. f. d.}$$

Les lois de l'arithmétique sont de deux sortes:
Lois générales, vraies pour tous les nombres indistinctement,
Lois spéciales, vraies pour certains espèces de nombres
(les unes et les autres sont générales, et portent sur une infinité
de cas particuliers.)

Les premières sont considérées comme des théorèmes de l'algèbre.

Exemples: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

identités
sont déduits des lois fonda-
mentales des opérations
arithmétiques.

Mais à tort: ce sont des théorèmes de l'arithmétique, portant
sur des nombres entiers. La notation dite algébrique est
nécessaire pour donner à ces vérités la généralité qu'elles
comportent, et pour abréger le langage (Ex: le produit
de la somme de $2n$ par leur diff. est égal à la différence
de leurs carrés.) De même que dans les énoncés, elle est dans
les démonstrations: en effet, pour qu'une démonstration soit générale,
il faut que les nombres auxquels on raisonne soient indéter-
minés, et qu'on ne s'appuie sur leurs propriétés particulières
ni sur les propriétés du système de numération employé. On
intend alors qu'on représente les nombres par des lettres.

Nous verrons plus tard pourquoi ces vérités paraissent des théorèmes de l'algèbre, ou plutôt de l'arithmétique généralisée: c'est que la généralisation du nombre conservant les lois fondamentales des opérations, ces théorèmes sont en core vrais pour les nombres généralisés. ~~Soient donc~~ ^{par extension} départ le domaine de l'arithmétique pure; ils sont plus généraux que les lois spéciales, et qui y restent au contraire confinées.

Les lois spéciales concernent des espèces ^{strictement} de nombres. Comment se distinguent ces espèces? Quelles sont les propriétés qui appartiennent à certains nombres à l'exclusion des autres? L'addition et la multiplication sont toujours possibles, tous les nombres s'y comportent de même. La soustraction n'est possible que si le 1^{er} n. est $>$ le 2^e; elle implique donc la propriété de l'inégalité, dont les lois sont très simples: si $A > B$, et $B > C$, $A > C$. (1)

Reste la division, qui n'est possible (exactement) que si le dividende est un multiple du diviseur. Dans les autres cas, la division donne naissance à un reste. C'est au point de vue de la division que les nombres diffèrent surtout entre eux; ce sont leurs caractères de divisibilité qui servent à les classer.

Definition du diviseur (sous multiple ou facteur) (2)

Tout diviseur de deux nombres divise leur somme, leur différence, le reste de leur division.

D'où: algorithme d'Euclide pour trouver le pl gr commun div.

Repose sur ce principe: qu'une suite de nombres décroissants est nécessairement limitée. C'est que la suite naturelle des nombres a un commencement. Principe synthétique, intuitif.

- (1) Principe qui permet de ^{ordonner} ~~classer~~ les nombres par ordre de grandeur croissante; c'ad que la suite nat. est linéaire et illimitée (elle pourrait être périodique ou circulaire.)
- (2) Définir nombre premier; nombres premiers entre eux

Remarque que le nombre infini est si peu contradictoire, que l'on est obligé d'invoquer un principe synthétique pour prouver qu'on doit s'arrêter. D'ailleurs, la progression infinie est possible, si la régression infinie est impossible. Dans un sens, il n'y a pas de raison pour s'arrêter; dans l'autre, il y en a une.

Corollaires: Tout diviseur commun de $2n$ divise leur p.g.c.d. Quand on multiplie ou divise $2n$ par un 3^e , leur p.g.c.d. se trouve multiplié ou divisé par ce 3^e .

Théorème fondamental: Tout nombre qui divise un produit de 2 facteurs est premier avec l'un d'eux divise l'autre. C divise AB , est premier avec A : donc leur p.g.c.d. est 1. Le p.g.c.d. de AB et BC est B . Or C divise AB et BC ; donc il divise B .

- Tout nombre non premier admet un facteur premier.

Démonstration fondée sur le principe de régression.

~~Tout nombre premier qui divise un produit de plus de deux nombres divise au moins l'un d'eux.~~

Tout nombre non premier est un produit de facteurs premiers.

Démonstration fondée sur le principe de régression.

Corollaire: Un nombre n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers.

La suite des nombres premiers est infinie.

En effet, soit p le dernier des n prem. formons le produit de tous les n prem. $P = 2.3.5 \dots p$.

Le $n. P+1$ est premier ou non. Si oui, théorème démontré. Si non, il a un facteur premier. Or tous les n prem jusqu'à p divisent P , donc ne divisent pas $P+1$; il y a donc dans tous les cas un m premier plus grand que p .

Démonstration fondée sur le principe de progression: après chaque nombre premier il y en a un autre; aucun n'est le dernier. Repose à tout tour sur l'infini de la suite naturelle des nombres.

Le principe de régression peut servir à démontrer des propriétés negatives des nombres, de la manière suivante. On prouvera que si telle propriété appartient à un nombre (quelque, mais plutôt grand), elle appartient à un plus petit. On est ainsi engagé dans une régression infinie, qui est impossible, en vertu de la constitution même de la suite naturelle. On en conclut que la propriété n'appartient à aucun nombre (Legendre).

(Permet le 1^{er} l'a employé à démontrer qu'il n'y a aucun triangle rectangle en nombres entiers ne peut être un carré.)

Théorème: Il n'y a aucune formule qui ne contienne que des nombres premiers. (algébrique.)

Supposons qu'on ait une telle formule: $ax^3 + bx^2 + cx + d = P$ qui, pour $x = k$, donne le nombre premier p . Faisons

$$x = k + py: \quad P = (ak^3 + bk^2 + ck + d) \\ + (3ak^2 + 2bk + c) py \\ + (3ak + b) p^2 y^2 \\ + a p^3 y^3$$

La 1^{ère} ligne = p ; donc P est un multiple de p .

A plus forte raison il n'y a pas de formule qui donne tous les nombres premiers, et rien qu'eux.

Car on peut trouver des formules qui contiennent tous les nombres premiers (à partir de l'un d'eux), par ex.: $6n + 1$ pour les n prem. > 3 .

Remarque que le principe de régression ne serait plus vrai dans l'ensemble des nombres négatifs et fractionnaires.

Il suppose essentiellement que la suite de nombres entiers est infinie en avant; c'est pourquoi il ne s'applique que dans la théorie des nombres.



6^e leçon.

La théorie des nombres ne se borne pas à étudier la divisibilité des nombres; elle ~~se~~ considère aussi le reste de leur division, et ~~regarde~~ les classe d'après ce reste.

Théorème: Quand la différence de 2 nombres est multiple d'un 3^e nombre, les 2 nombres divisés par ce 3^e donnent des restes égaux.

Réciproque: Si 2 nombres divisés par un 3^e donnent le même reste, leur différence est un multiple de ce 3^e.

On considère comme équivalents, au p^r de vue de la divisibilité par un nombre m , les nombres qui divisés par m donnent le même reste. On dit qu'ils sont congrus par rapport au mod m (ou encore: réduits l'un de l'autre par rapp^t au mod m).

Les nombres congrus s'échelonnent à distances égales dans la suite naturelle, soit de m en m . ~~Plus qu'on trouve~~ ^{On voit} entre 1 et m : c'est le reste minimum, c'est le reste de la division des autres par m .

Les congruences sont des équivalences par rapp^t à un diviseur, le module. Il n'y a que m nombres distincts par rapp^t au module m .

Les propriétés des congruences dérivent de celles des multiples d'un même nombre. ~~On ne change pas le reste d'une division en ajoutant ou retranchant un même nombre au dividende et au diviseur; en ajoutant ou retranchant au dividende un multiple du diviseur.~~

Si plusieurs nombres divisés par un même module ont des restes congrus au produit de leurs restes. C'est le principe de la preuve par 9 de la multiplication.

Méthode de la théorie des nombres. Elle a pour objet les lois spéciales des nombres, c'est-à-dire les propriétés de certaines classes de nombres : nombres premiers surtout ; n. carrés, etc. Ces propriétés résultent de la divisibilité des nombres.

En arithmétique élémentaire, on étudie les caractères de divisibilité des nombres par certains diviseurs : ces caractères dépendent du système de numération, tandis que la divisibilité d'un nombre par un autre en est indépendante. Nous expliquerons plus loin ce paradoxe.

l'arithmétique supérieure nous borne pas à distinguer les nombres divisibles ou non par un nombre donné. Elle introduit plus de précision en classant les nombres d'après le reste de leur division (les n. divisibles donnent le reste 0).

Théorème : Quand la différence de 2 nombres est ^{un multiple} divisible par un 3^e n., les 2 prem. divisés par ce 3^e donnent le même

Réciproque : Quand 2 nombres divisés par un 3^e donnent le même ^(reste) reste, leur différence est divisible par ce 3^e.

On rangera dans la même classe tous les nombres qui, divisés par le même module, donnent le même reste, et on les regardera comme équivalents au p. de vue de la divisibilité, ou encore comme congrus suivant ce module. ^(part. mod.)

La distribution des nombres congrus est intuitive dans la suite naturelle : d'abord, les multiples d'un nombre m (congrus à 0. mod. m) se succèdent de m en m ; de même, les nombres congrus à 1, à 2, ... à $(m-1)$. En conséquence, il y a toujours entre 0 et m , un nombre, et un seul, congru à un nombre donné : c'est le reste de sa division par m , ou son résidu.

+ Ce nombre, par lequel on divise plusieurs autres, s'appellera le module.

Les nombres $0, 1, 2, \dots, (m-1)$ forment un système complet de restes incongrus par rapport au mod. m .

La considération de l'ordre montre encore que, dans m nombres consécutifs de la suite naturelle, il y a toujours un nombre congru à un nombre donné (en partie à 0, c.à.d. multiple de m).

Notation. Dans la Théorie des nombres (art. VII), Legendre est souvent conduit à ~~poser des égalités~~ en négligeant les multiples d'un module, c.à.d. à poser 2 nombres comme égaux à un nombre pris du module. Il écrit encore que leur différence est divisible par le module:

$$\frac{a-b}{m} = e,$$

e étant un entier indéterminé.

Gauss, dans ses Disquisitiones arithmeticae (1801), a ~~imaginé~~ ^{représenté} les congruences comme des égalités:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Cette notation est préférable à la notation dite algébrique:

$$a = b + mq \quad \text{ou} \quad a - b = mq$$

parce qu'elle exprime que le nombre q est entier, et débarrasse l'écriture de cette indétermination. Ainsi les ~~calculs des~~ congruences remplacent les équations indéterminées de l'algèbre par ex.

$$\text{devient:} \quad \begin{array}{l} ax + by = c \\ ax \equiv c \pmod{b} \quad by \equiv c \pmod{a} \end{array}$$

Ce qui déterminait la solution de cette équation, c'est la condition que x et y sont entiers. La notation congruence exprime cette condition. Ainsi s'explique que Legendre identifie la Théorie des nombres à l'algèbre indéterminée.

L'assimilation de la Théorie des nombres à l'algèbre se justifie par l'analogie des congruences avec les équations.

On peut ajouter ou retrancher membre à membre 2 congruences de même module: car si:

$$a \equiv b \quad c \equiv d \pmod{m}$$

$$a - b = \text{mult. } m, \quad c - d = \text{mult. } m \quad (a-b) \pm (c-d) = \text{mult. } m$$

En particulier, on peut ajouter ou retrancher un même nombre aux 2 nombres d'une congruence (car 2n égaux sont congrus modulo un m quelconque) et ajouter ou retrancher ~~un~~ à tous les membres un mult. du module (car un mult. de m est congru à 0 (mod m)).
On retrouve ce théorème de Bézout.

Le reste d'une division ne change pas quand on ajoute ou retranche au dividende un multiple du diviseur.

On peut multiplier membre à membre 2 congruences de même module:

$$a \equiv b \quad c \equiv d \quad (\text{mod } m)$$

$$a = mq + b \quad c = mq' + d$$

$$ac = m^2 qq' + dmq + bmq' + bd \quad ac \equiv bd \quad (\text{mod } m)$$

On retrouve en particulier ce théorème de Bézout.

Si l'on divise 2 ou plusieurs nombres par le même module, leur produit donne le même reste que le produit de leurs restes.

Application pratique: Preuve par 9 de la multiplication.

Théorème: Tout nombre entier est congru à la somme de ses chiffres suivant le module 9.

En effet, $10 \equiv 1$, $100 \equiv 10 \equiv 1$, $10^n \equiv 1$;

$$a \cdot 10^n \equiv a. \quad N = a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + \dots + k \cdot 10 + l,$$

$$N \equiv a + b + \dots + k + l.$$

On ~~fait~~ trouve ainsi les résidus des facteurs, on fait leur produit; il doit être congru au résidu du produit.

Naturellement, la preuve par 9 est en défaut si l'on s'est trompé d'un multiple de 9.

Comment se procède-t-il, relatif à la base de numération, peut-il éviter la divisibilité indépendante du système?

C'est que c'est un caractère ^{ou caractère de} la divisibilité par $(X-1)$ d'un nombre écrit dans le système à base X . C'est la propriété générale des nombres, dont la preuve par 9 n'est qu'un cas particulier. Pour reconnaître la divisibilité d'un nombre par n , il suffit de le lire dans le système à base $(n+1)$.

Enfin, on peut diviser les 2 membres d'une congruence par un même nombre, pourvu qu'il soit premier avec le module :

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \frac{a-b}{m} = c.$$

Pour que $\frac{a-b}{mn} = c$, il faut que m, n soient premiers entre eux; car $(a-b)$ étant divisible séparément par m et n , sera divisible par leur produit.

Dans le cas du module premier, tout nombre non divisible par p est premier avec p ; on peut donc diviser les 2 membres d'une congruence par tout nombre non nul \pmod{p} .
(Analogie avec les équations) — Théorème de Fermat.

Cette analogie réelle, on a cherché à la rendre complète. Commune à l'algèbre, il y a des parmi les congruences des identités, des égalités et des équations.

Équation-congruence du 1^{er} degré $ax \equiv b \pmod{p}$
est identique si $a \equiv b \equiv 0$; impossible si $a \equiv 0$.

Si $a \not\equiv 0$, elle a une racine (et une seule) entre 0 et m .
On ne considère pas comme distinctes les racines congrues \pmod{m} ; ou $x \equiv px' \pmod{p}$.
Propriété, on n'aient compte que des racines comprises entre 0 et m .
Une congruence de module premier (non identique) ne peut avoir un nombre de racines supérieur à son degré.

La congruence:

$$x^p - x \equiv 0 \pmod{p}$$

a p racines distinctes; elle est vérifiée par tous les n entiers.

Ainsi la congruence, simple notation arithmétique, devient le sujet d'une théorie propre et indépendante, qu'on a rendue aussi analogue que possible à la théorie des eq. algébriques. Il est curieux que l'ath. des congruences soit en soi simple et moins facile que celle des équations, et que l'arithmétique ait recours à l'algèbre, et s'efforce pour ainsi dire de la copier. C'est que la généralisation du nombre généralise et simplifie les propriétés des nombres.

+ Dans le cas d'un module premier, un produit ne peut être $\equiv 0$ que si l'un de ses facteurs $\equiv 0$.

Deux ou plusieurs nombres étant divisés par le même module p , (33)
 leur produit est congru au produit de leurs restes.
 Caractère de divisibilité d'un nombre par 9.

$$10 \equiv 1 \quad 100 \equiv 10 \equiv 1 \quad 10^n \equiv 1 \quad (\text{mod. } 9)$$

D'où : tout nombre est congru à la somme de ses chiffres.

Remarque. Cette ^{critérium} propriété dépend du syst. de numération, et pourtant la divisibilité d'un nombre par 9 en est indépendante. C'est que ce critérium est général pour la divisibilité par $(X-1)$ dans le système à base X . Ainsi pour reconnaître la divisibilité d'un nombre quelconque par n , il suffirait de l'écrire dans le système à base $(n+1)$.

Rôle de l'idée d'ordre dans la théorie des nombres :
 De ce que les multiples de m se suivent de m en m dans la suite naturelle, on conclut qu'il y a toujours un parmi m nombres consécutifs.

Théorème : Si a est premier avec m , les nombres :

$$a, 2a, 3a, \dots, (m-1)a$$

sont congrus, suivant le mod m , aux nombres :
^{proportionnels} $1, 2, 3, \dots, m-1$

pris dans un autre ordre. En effet, 1° tous ont un reste non nul : car m n'est premier avec a n'eu divisé aucun.
 2° tous les restes sont différents : car si $pa \equiv qa$,
 $pa - qa = (p-q)a$ serait divisible par m , ce qui est impossible, $p-q < m$. Donc les restes sont tous $> 0, < m$.
 donc ce sont les $(m-1)$ (nombres entiers premiers.)

Théorème de Fermat : On a en vertu du lemme précédent, (p n. premier qui n. divisé par a) donc a premier avec m .
 $a. 2a. 3a \dots (p-1)a \equiv 1. 2. 3 \dots (p-1).$

$$\text{ou : } 1. 2. 3 \dots (p-1) [a^{p-1} - 1] \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

Donc a n'est pas divisible par le n. premier p , ou a .

ou, en divisant par $1.2.3 \dots (p-1)$ qui est premier avec p .

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

(2) on a aussi $x^p - x \equiv 0 \pmod{p}$

~~Théorème~~ (cité par Waring) Théorème de Wilson. Si p est premier,
dim. par Lagrange & Euler) $1.2.3 \dots (p-1) + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

Dans la suite: $a, 2a, \dots, (p-1)a$ ($a < p$, donc premier à p)

Il y a un nombre et un seul qui a 1 pour résidu.
soit αa : $1 \leq \alpha \leq p-1$. α associé de a .

Pour que α soit égal à a , il faut que $a^2 - 1 \equiv 0$,
c'est-à-dire que $(a-1)$ ou $(a+1) \equiv 0$. $a=1$, $a=p-1$.

Dans tous les nombres $2, 3, \dots, (p-2)$ sont associés
deux à deux, leur produit est $\equiv +1$.

$$1.2.3 \dots (p-2)(p-1) \equiv p-1$$

$$1.2.3 \dots (p-2)(p-1) + 1 \equiv p \equiv 0 \pmod{p}$$

Cela veut dire que pour les nombres premiers, car si p
n'est pas premier, ~~il~~ il est le produit de 2 nombres de
l'ensemble $1.2.3 \dots (p-1)$, et par conséquent il divise
leur produit, et ne peut diviser $(p-1)! + 1$.

Cette théorie donne une propriété caractéristique des n. prem.

Remarque: La considération de l'ordre des nombres dans
la suite naturelle rend intuitives certaines de leurs propriétés.

La théorie des congruences a pour effet de transformer
l'ordre linéaire illimité en un ordre circulaire ou
périodique; et de réduire l'ensemble des nombres aux
 m premiers. D'où ses applications à la théorie des
substitutions.

(1) On en conclut que l'équation-congruence: $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$
a les $(p-1)$ premiers nombres entiers.

Si, bon est averti par la congruence évidente $x \equiv 0 \pmod{p}$
qui a pour racine 0, $p, 2p, \dots$ on a la congruence: $x^p - x \equiv 0 \pmod{p}$
qui a pour racines tous les nombres entiers.

La Théorie des nombres a pour objet les lois et propriétés spéciales des nombres entiers. Pour donner une idée de ces lois, on va passer en revue les principaux théorèmes et problèmes de cette science, pour montrer la disproportion qu'il y a entre sa méthode et son objet, entre la simplicité des résultats et la difficulté ou la complication des moyens employés pour les obtenir.

Une fonction qui joue un grand rôle dans la théorie des nombres, est le nombre des nombres premiers à un nombre donné et non supérieurs à lui: $\varphi(1) = 1$.

Si p est premier, $\varphi(p) = p - 1$.

Si $n = p^\alpha$, $\varphi(n) = p^{\alpha-1}(p-1) = n(1 - \frac{1}{p})$

Si $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \dots$ $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p})(1 - \frac{1}{q})(1 - \frac{1}{r}) \dots$

Si $n = abc \dots$ (premier entre eux) $\varphi(n) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c) \dots$

Théorème: Si $d, d', d'' \dots$ sont tous les diviseurs de n (y compris 1 et n) $n = \sum \varphi(d)$.

Exemple: 24 a pour diviseurs: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24.

$$24 = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(4) + \varphi(8) + \varphi(3) + \varphi(6) + \varphi(12) + \varphi(24) \\ = 1 + 1 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4 + 8.$$

Propriétés des nombres impairs. Leurs différentes formes:

$$2n+1; 4n+1, 4n+3; 6n+1, 6n+3, 6n+5; \text{ etc.}$$

Propriétés des nombres premiers.

Tout nombre premier impair (> 3) est de la forme $6n \pm 1$.

Un nombre impair somme de 2 carrés est de la forme $4n+1$.

En effet, il doit être la somme d'un carré pair et d'un carré impair.

Or un carré pair est $4n$; un carré impair est $4m^2 + 4m + 1$.

Réciproque (impars facile; beaucoup plus difficile à démontrer).
 Tout nombre premier de la forme $(4n+1)$ est la somme de 2 carrés (cà'd est de la forme: x^2+y^2).
 Tout nombre premier de la forme $(4n+3)$ est la somme de 3 carrés au moins.

On a ainsi une propriété caractéristique des nombres premiers de la forme: $4n+1$.

Tout nombre premier $(8n+1)$ est à la fois des 3 formes:
 x^2+y^2 , x^2+2y^2 , x^2-2y^2 .

Tout nombre premier $(8n+3)$ est de la forme:

Tout nombre premier $(8n+7)$ est de la forme:

Résumé: { Forme x^2+y^2 : $8n+1$, $8n+5$.
 " x^2+2y^2 : $8n+1$, $8n+3$.
 " x^2-2y^2 : $8n+1$, $8n+7$.

Sommaires / théorèmes d'Algèbre, cà'd ~~d'arithmétique~~ d'arithmétique générale).
 Le produit de 2 sommes de 2 carrés ou de k carrés est une somme de 2 carrés ou de k carrés.

En voici des identités de Lagrange:

$$(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2) = (a\alpha+b\beta)^2 + (a\beta-b\alpha)^2$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) = (a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)^2 + (a\beta-b\alpha+c\delta-d\gamma)^2 + (a\gamma-b\gamma+c\alpha-d\beta)^2 + (a\delta-b\delta+c\beta-d\alpha)^2$$

Réciproque (beaucoup plus difficile, de l'arithmétique pure):

Si un nombre divise une somme de 2 ou k carrés sans les diviser tous, il est lui-même une somme de 2 ou k carrés.

Démonstration par le principe de régression: on construit une suite d'entiers décroissants qui ne peuvent être nuls: donc l'un d'eux est nécessairement 1.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'une proposition énoncée par Fermat.

Nombres polygonaux On considère la ^{série} à termes généraux: $n, 2n+1, 3n-2, 4n-3, \dots, kn-k+1$.
dont les sommes progressives sont respectivement:
 $\frac{n(n+1)}{2}, n^2, \frac{n(3n-1)}{2}, n(2n-1), \dots, k \frac{n(n-1)}{2} + n$

Remarque: On a démontré en passant que la série des n impairs engendre la suite des nombres ~~par~~ carrés, ou le théorème: La somme des n premiers n impairs est $= n^2$.
Ces suites sont celles des nombres triangulaires:

1, 3, 6, 10, 15, 21,

carrés: 1, 4, 9, 16, 25, 36,

pentag: 1, 5, 12, 22, 35, 51,

hexag: 1, 6, 15, 28, 45, 66, etc.

Théorème de Fermat: Tout nombre entier est la somme de 3 nombres triangulaires, de 4 carrés, de 5 pentagones, etc.
(n'est démontré que pour les n triangulaires et carrés)
Legendre a traité le problème de la décomposition des nombres en 3 carrés —

Théorèmes sur les puissances des nombres (principes de régression employés par Fermat et Euler):

La somme de 2 cubes ne peut être un cube.

La somme de 2 bicarrés ne peut être un carré (ni un bicarré).

Théorème général, énoncé par Fermat (non démontré):

Equation: $x^n + y^n = z^n$ est impossible pour $n > 2$.

Problème général de la représentation des nombres par les formes.

Exemple forme quadratique: $ax^2 + by + cy^2$

a, b, c nombres donnés; x, y , nombres indéterminés.

Toute forme définit une classe de nombres qui y sont contenus.

Recherche de la forme qui convient aux diviseurs de la forme
 $t^2 - Du^2$, D donné, t, u indéterminés. (première partie)
 Si l'on détermine séparément les formes linéaires et les formes
 quadratiques qui conviennent à ces diviseurs, tout nombre
 premier contenu dans une de ces formes linéaires sera aussi
 contenu dans une des formes quadratiques. D'où une foule
 de théorèmes sur les propriétés des nombres premiers, et sur
 la divisibilité des formes les uns par les autres (Méthode
 due à Lagrange)

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on pren-
 ne divise la forme $(t^2 - Du^2)$ est que D soit résidu quadratique
 de p , c'est-à-dire l'équation: $x^2 - D \equiv 0 \pmod{p}$
 soit possible.

C'est l'origine de la théorie des résidus quadratiques.
 La question revient à la résolution de la congruence binôme
 du 2^e degré: $x^2 \equiv D \pmod{p}$
 et de mod. premiers: $x^2 \equiv D \pmod{p}$
 Toutes les congruences du 2^e degré se ramènent à des congruences
 de cette forme.

Si l'on prend les carrés des $(p-1)$ premiers nombres, et qu'on
 prend leurs résidus par rapp. à p , les résidus symétriques
 sont égaux: car: $a(p-a) \equiv -a^2$
 $(p-a)^2 \equiv p^2 - 2ap + a^2 \equiv a^2 \pmod{p}$

Sur les $(p-1)$ prem. nombres, il y a donc $\frac{p-1}{2}$ résidus quadr.
 et $\frac{p-1}{2}$ non-résidus. Exemple: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$
 $\{1, 4, 2, 2, 4, 1\} \pmod{7}$

Les résidus quadratiques de p sont donc ceux des $\frac{p-1}{2}$
 prem. nombres. Ils sont tous différents, car on démontre
 que 2 de ces nombres ne peuvent avoir le même résidu:
 car pour qu'on ait: $a^2 \equiv b^2$ ou $a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{p}$
 il faudrait qu'on eût: $(a-b) \equiv 0$ ou $(a+b) \equiv 0 \pmod{p}$
 ce qui est impossible, a et b étant par hyp. inférieurs à $\frac{p-1}{2}$

Appelons nombre associé les couples de nombres qui vérifient la congruence bilinéaire: $yz \equiv D \pmod{p}$
 2 nombres associés ne peuvent être égaux que si D est résidu quadratique de p : dans ce cas, la congruence:

$$x^2 \equiv D \pmod{p}$$

admet 2 solutions, x_0 et $p-x_0$, dont le produit:

$$x_0(p-x_0) \equiv -x_0^2 \equiv -D \pmod{p}$$

Si D est non résidu, les $(p-1)$ premiers nombres forment $\frac{p-1}{2}$ couples congrus à D : donc:

$$1, 2, 3, \dots, (p-1) \equiv D^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

Si D est résidu de p , un seul de ces couples est congru à $-D$, les autres à $+D$: donc:

$$1, 2, 3, \dots, (p-1) \equiv -D^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

Or en vertu du théorème de Wilson: $(p-1)! \equiv -1$,
 donc:

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1$$

si D est résidu,

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$$

si D est non résidu.

Toute solution de la congruence: $x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0$

est un résidu, et de la congruence: $x^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0$

est non résidu.

Symbole de Legendre: $D^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{D}{p}\right) \pmod{p}$

$\frac{D}{p} = +1$ si D est résidu, $\frac{D}{p} = -1$ si D est non résidu.

Problème inverse: Trouver les nombres premiers dont D est résidu quadratique. Le résout au moyen de la

Loi de réciprocité de Legendre: $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$

Càd: Si l'un des nombres p, q est de la forme $(4n+1)$,

p et q sont résidus ou non résidus l'un de l'autre à la fois.

Si p et q sont de la forme $(4n+3)$, l'un d'eux est résidu de l'autre, et l'autre non résidu de l'autre.

Peut-on représenter tous les nombres premiers par une forme? Non.
 Il n'y a aucune formule qui ne contienne que des nombres premiers.
 Supposons qu'on ait une telle formule: $ax^3 + bx^2 + cx + d = P$,
 qui pour $x = k$ donne le n premier p : Faisons $x = k + py$

$$P = ak^3 + 3ak^2py + 3akp^2y^2 + ap^3y^3 \\ + bk^2 + 2bkpy + bp^2y^2 \\ + ck + cpy \\ + d$$

$$= \frac{p + m_1 k py + m_2 k p^2 y^2 + ap^3 y^3}{p} = \text{multiple } p$$

A plus forte raison il n'y a pas de formule qui donne tous
 les nombres premiers, et eux seuls, c'est qui les caractérise.
 Leur propriété caractéristique résulte du théorème de Wilson.
 — De là vient la difficulté de découvrir des propriétés générales
 des nombres premiers. Exemple:

Problème du nombre des nombres premiers compris entre
 deux bornes données (en particulier, inférieurs à un n donné).
 N'est pas résolu: M. Lechebicheff a seulement trouvé des
 limites entre lesquelles se trouve compris le nombre demandé.

Or cette recherche met en jeu toutes les ressources de l'Algèbre
 et de l'Analyse: formules de Stirling, c'est-à-dire de une série
 divergente; des logarithmes & autres fonctions transcendentes
 le nombre π ; des intégrales, etc. (pour $\log(1.2.3 \dots n)$)
 exprimé par le produit infini: $2 \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \right)$ formule de Wallis.
 Contraste entre la simplicité du problème et la difficulté de
 la solution, et la complication énorme des moyens employés
 pour la démonstration, et l'obscurité ou l'incertitude des résultats.
 Relatif à la discontinuité des propriétés des nombres; aussi bon
 fait appel à l'Algèbre, c'est-à-dire au nombre généralisé, affranchi des
 exceptions qui embarrassent le π même qu'il constitue
 en même temps les propriétés spéciales des nombres; et à l'Analyse.

cà d au continu. Il semble donc qu'il faille plonger
les nombres dans le continu pour les mieux connaître,
comme si le continu était plus intelligible et plus
maniable que le nombre.

D'autre part, le caractère mystérieux de ces propriétés
des nombres, ~~réfractaires~~ donne l'illusion de l'objectivité:
quelques-unes forment des îlots inabordable ou des forêts
inexpugnables: exemples: certains théorèmes de Fermat.
~~Cela ne serait pas possible si les nombres étaient de simples~~
~~Donc le mysticisme de certains arithméticiens, considérant~~
~~les nombres comme réels en dehors de l'esprit, et lui résistant.~~
(Pythagoriciens) Ce qu'il y a de vrai dans cette tendance, c'est
que les nombres ne seraient pas obscurs et réfractaires
s'ils n'étaient que de ^{simples} concepts, de pures constructions
de l'esprit. Ils ne contiendraient rien de plus que ce que
l'esprit y mettrait en les formant, et il n'y aurait qu'à
les analyser pour voir toutes leurs propriétés. ~~Et ils~~
~~sont donc le produit d'une synthèse et d'une synthèse~~
~~intuitive qui, en les construisant, détermine une infinité~~
~~de propriétés implicites, autres que celle qui suffit à les~~
~~définir; de même qu'en construisant un triangle on~~
~~détermine nécessairement 3 angles dont la somme est~~
~~égale à 2 droits. Et cette synthèse n'est pas logique, car~~
~~l'analyse logique suffirait à la résoudre: or si l'on peut~~
~~décomposer un nombre en une somme ou en un produit de~~
~~facteurs, il est plus difficile de le décomposer en une somme de~~
~~carrés, par ex. Le contenu de la synthèse n'est pas logique, mais~~
~~intuitif: c'est la grandeur.~~ (théorème de D'Holbach)

+ Exemple d'une propriété problématique: Tout nombre pair
est la somme de 2 nombres premiers. Vérifié jusqu'à 1000;
on n'en a prouvé ni la vérité, ni la fausseté.

Remarque historique: La Théorie des nombres n'est
développée bien plus lentement et plus tard que
l'algèbre et l'analyse, justement parce qu'elle a
besoin de leur concours. La Th des congruences a
été incitée de la Th des équations. - Ainsi la Th.
des nombres n'est pas une science autonome et qui se
suffise à elle-même, ce qui est de beaucoup plus étonnant
que l'idée de nombre parait absolument indépendante
des idées de ordre et de grandeur, et plus simple qu'elles.

Les lois générales de l'arithmétique sont celles qui résultent des propriétés ^{combinatoires} fondamentales des opérations; elles sont indépendantes de la nature ou valeur particulière des nombres combinés. Aussi est-il bon pour les formuler et les démontrer, d'employer des lettres, ce qui ^{présente bien} la généralité des propositions.

Exemple: Le carré de tout nombre entier est supérieur d'une unité au produit des 2 nombres voisins dans la suite naturelle:

$$n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$$

En général, on obtient toutes les propositions de ce genre en appliquant aux expressions littérales les règles du calcul des nombres entiers: loi commutative, associative de l'addition et de la multiplication; loi distributive de la multiplication par rapport à l'addition. C'est ce qu'on appelle improprement le calcul algébrique.

Toutes les expressions ainsi obtenues en transformant l'une d'elles suivant les lois des opérations arithmétique sont équivalentes, c'à d ont la même valeur numérique, quelle que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres; leur équivalence constitue les identités algébriques:

Ex: $(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Identités de Lagrange, etc.

Les additions et multiplications indiquées sont toujours possibles; mais non les soustractions et divisions. Le calcul algébrique comporte donc des restrictions & exceptions.

On ne peut écrire $(a-b)$ que si $a > b$; $\frac{a}{b}$ que si a est divisible par b . Or on n'en sait rien à l'avance; on écrit donc conditionnellement $a-b$, $a:b$, en supposant que ces expressions ont un sens numérique. Il y a intérêt, pour assurer au calcul toute sa généralité, à supprimer ces restrictions en rendant toujours possibles les opérations inverses comme les opérations directes. Pour cela, il suffit de donner un sens aux expressions $(a-b)$, $(a:b)$ dans le cas où elles n'en ont pas, c.à.d. de ~~les~~ créer des nombres correspondant à ces symboles et que l'on considérera comme les résultats de ces opérations. Ainsi l'extension des opérations entraîne une extension corrélatrice de l'ensemble des nombres. Et inversement, la généralisation du nombre implique une généralisation des opérations arithmétiques, car elles n'ont été définies que pour les nombres entiers naturels. Il n'y a aucun contradiction à cela, pourvu qu'on spécifie bien que les nouvelles opérations ne sont pas identiques aux anciennes. Mais alors, en quoi consistent la généralisation? Comme les nouvelles opérations peuvent-elles être considérées comme l'extension des anciennes? C'est grâce à l'analogie de leurs propriétés combinatoires. La généralisation du nombre doit donc être régie par le principe de la permanence des règles de calcul (Hankel). On pourrait adopter une méthode radicale, et créer de toutes pièces, au moyen des nombres entiers, de nouveaux nombres pour lesquels on définirait à nouveau les opérations fondamentales; puis on remarquerait l'analogie de une partie du nouvel ensemble avec la totalité de

l'ensemble primitif, et on les identifierait après coup.
On aurait ainsi une suite d'ensembles superposés, tous
distincts comme les opérations qui les caractérisent
et qui rentrent les uns dans les autres. On préfère
suivre un marche moins arbitraire, moins logique peut-être,
mais qui montre comment on est amené à étendre
progressivement l'ensemble primitif.

Rappelons les propriétés fondamentales des opérations
directes (qui doivent se conserver dans l'agénéralisation):

I. L'addition est:

- 1^{re} uniforme (si $a=a'$, $b=b'$, on a: $a+b=a'+b'$)
- 2^o commutative: $a+b=b+a$
- 3^o associative: $(a+b)+c=a+(b+c)$
- 4^o a un module (zéro): $a+0=a$

II. La multiplication est:

- 1^{re} uniforme (si $a=a'$, $b=b'$, $ab=a'b'$)
- 2^o commutative: $ab=ba$
- 3^o associative: $(ab)c=a(bc)$
- 4^o distributive par rapport à l'addition: $(a+b)c=ac+bc$
- 5^o a pour module 1: $a.1=a$

$a \times 0 = 0$ (résulte de 4^o)

Comme toutes les propriétés des combinaisons de nombres
se déduisent logiquement des précédentes, les elles subsis-
teront tant que l'on conservera celles-ci. Les règles du
calcul algébriques s'appliquent donc aux nouveaux nombres.
Leur addition devra posséder les 4 propriétés, leur multipli-
cation, les 5 propriétés énoncées. Et ces propriétés suffisent
à définir ces combinaisons, puis qu'elles seules entrent

en considération. On appellera donc addition toute combinaison qui possède les 6 propriétés, multiplication toute combinaison qui possède les 6 propriétés.

La soustraction possède les propriétés suivantes (quand il est possible):

$$1^{\circ} x = a - b$$

$$x + b = a \quad (a > b)$$

2^o d'où:

$$(a - b) + b = a$$

Opération directe d'ant
complètement uniforme
l'opération inverse l'est

$$2^{\circ} (a - b) + c = (a + c) - b.$$

$$3^{\circ} (a - b) - c = a - (b + c)$$

$$4^{\circ} a - (b - c) = (a + c) - b$$

$$5^{\circ} (a - b) + (a' - b') = (a + a') - (b + b')$$

$$6^{\circ} (a - b) - (a' - b') = (a + b') - (a' + b)$$

Cas particuliers
Egalité

Le résultat d'une suite d'additions & de soustractions ne dépend pas de leur ordre, pourvu que les opérations successives soient possibles.

Pour lever cette restriction, on va considérer comme de nouveaux nombres les différences imaginaires $(a - b)$ où $a < b$, ~~c'est~~ les soumettre aux mêmes règles de calcul que les différences réelles; c'est qu'on ne les distinguera pas, et qu'on ne fera plus d'exception.

Tout nombre entier peut être représenté par une différence réelle: $(a - b)$. On admettra: $(a - b) + b = a$.

Définition de l'égalité et de l'inégalité: On posera:

$$a - b \geq a' - b'$$

Suivant qu'on a: $a + b' \geq a' + b$
Cette dernière relation a toujours un sens réel. Quand les diff. sont réelles, c'est un théorème; qd elles sont imag. une définition.

+ Il résulte qu, si: $a - b = a' - b'$, on a: $a + b' = a' + b$, et réciproquement.

Définition de l'addition:

$$(a-b) + (a'-b') = (a+a') - (b+b')$$

Soustraction:

$$(a-b) - (a'-b') = (a+b') - \overset{b+a'}{\cancel{a'+b}}$$

Ces deux opérations sont commutatives et associatives; de plus, elles sont uniformes et toujours possibles.

Remarque: $(a-b) - (a'-b') = (a-b) + (b'-a')$

Ainsi la soustraction se ramène à une addition (puisque $b'-a'$ existe toujours). On ajoute la symétrique.

Multiplication (Sans distinguer entre les différences) on a:

1° $(a-b)c = ac - bc = c(a-b)$ car si: $a-b=d$,
 $a=b+d$; $ac = bc + dc$; $dc = ac - bc$

2° $(a-b)(a'-b') = \cancel{(a-b)}a(a'-b') - b(a'-b')$
 $= (aa' - ab') - (ba' - bb')$
 $= (aa' + bb') - (ab' + ba')$

Ce résultat est une différence (réelle ou imaginaire).
 Donc la multiplication est toujours possible, et uniforme.
 Elle conserve d'ailleurs toutes ses propriétés.

Simplifications: ~~$(a-b) = (a+m) - (b+m)$~~
 ~~$(a-b) + (m-m) = (a-b) + 0 = a-b$~~
 On peut ajouter ou retrancher un même nombre aux 2 termes d'une différence.
 Ainsi 0 reste le module de l'addition: D'ailleurs, si:
 $a+b' = b+a'$, $(a-b) - (a'-b') = (a+b') - (b+a') = 0$.

Supposons maintenant: $a=b$, $a' > b'$ ($a'-b'$ réel):
 $0 + (a'-b') = (a+a') - (b+b') = a' - b'$

$$0 - (a'-b') = (a+b') - (b+a') = b' - a'$$

Or $(a'-b')$ est un nombre réel; \underline{n} : donc une différence
 réelle est de la forme $0 + \underline{n}$, une diff. imag. de la forme: $0 - \underline{n}$.

Il suffit donc d'introduire les nouveaux nombres $0-n$ à côté des anciens: $0+n=n$. On les appellera symétriques. On remarquera que $(a-b)$ et $(b-a)$ sont symétriques. Encore simplement: $+n, -n$.
 On fait les mêmes raisonnements que pour les complexes: $\begin{cases} (+a) + (+b) = +(a+b) \\ (+a) + (-b) = +(a-b) \\ (-a) + (-b) = -(a+b) \end{cases}$
Addition: ~~On écrit tous les nombres à droite (comme d'habitude)~~

Soustraction: On ~~donne~~ ajoute le nombre changé de signe.
Multiplication: ~~$(a-0)(b-0)$~~ ~~$(-a \text{ change un tout car } a \text{ symétrique de } -a)$~~
 $(a-0)(a'-0) = +aa'$
 $(a-0)(0-b') = -ab'$
 $(0-b)(0-b') = +bb'$

Donc règle des signes (la même pour la division)

Généralisation de la division: Quand elle est possible

elle possède les propriétés suivantes:

1° $x = a : b$ quand: $bx = a = xb$.
 donc: $(a : b) \times b = a$.

L'opération directe étant complètement uniforme, l'opération inverse est uniforme.

2° $(a : b) \times c = (a \times c) : b$.

3° $(a : b) : c = a : (b \times c)$.

4° $a : (b : c) = (a \times c) : b$.

5° $(a : b) \times (a' : b') = (a \times a') : (b \times b')$

6° $(a : b) : (a' : b') = (a \times b') : (b \times a')$

Cas particuliers
 $= 1$ (Egalité)

Le résultat donne suite de multipl^{iers} et divisions indépendantes de leur ordre, pourvu que les divisions à effectuer soient toutes possibles.

+ En retranchant le plus petit terme du plus grand, on les met sous la forme: $a(n-0)$ et $(0-n)$. $\begin{cases} n = a-b \\ \text{si } a > b \\ = b-a \text{ si } b > a \end{cases}$

S Donc, si on a: $(n+0) = 0+n$.
 $a : b = a' : b'$, ou inversement:
 $ab' = ba'$, et réciproquement.

Pour lever cette restriction, on va considérer comme de nouveaux nombres les quotients imaginaires $(a:b)$ quand a n'est pas divisible par b ; on les soumettra aux mêmes règles de calcul que les quotients réels, c'est-à-dire qu'on ne fera plus de distinction entre eux. D'ailleurs, tout nombre ^{par un réel} peut être conçu comme quotient réel. On convient donc que dans tous les cas:

$$(a:b) \times b = a$$

Définition de l'égalité et de l'inégalité. On pos.

$$a:b \geq a':b'$$

Suivant que: $a \times b' \geq a' \times b$

cette dernière relation ayant toujours un sens réel.
(Ex: $3 \times 8 = 4 \times 6$; $8:4 = 6:3$, $8:6 = 4:3$.)

Définition de l'addition et de la multiplication:

$$(a:b) \times c = (a \times c):b$$

$$(a:b)(a':b') = aa':bb'$$

Division: $(a:b):c = a:(b \times c)$

$$a:(b:c) = (a \times c):b = \frac{a \times c}{b}$$

$$(a:b):(a':b') = (a \times b'):(b \times a') = (a:b) \times (b':a')$$

La multiplication et la division sont toujours possibles et uniforment.

Simplification: $a:b = am:bm$

On peut multiplier ou diviser les 2 termes d'une fraction par un même nombre. Réduction à la plus simple expression.

Si a est divisible par b : $a = bn$, $a:b = n:1$.

Assimilation des fractions de dénom. 1 aux entiers qui forment leur numérateur. $(n:n) = (1,1) = 1$.

Module: car: $(a:b) \times (n:n) = (an:bn) = (a:b)$

Remarque $a:b = (a:1)(1;b) = a(1;b)$

Il suffit donc d'introduire les fractions ayant pour numérateur 1 et pour dénominateur, un nombre entier (càd les inverses de tous les nombres entiers) ⁽¹⁾

La division est ramenée à la multiplication: Diviser par un nombre, c'est multiplier par le nombre inverse.

N. B: En général, $a:b$ est l'inverse de $b:a$

Définition de l'addition: $(a:b) + (a':b')$.

Puisq On a toujours:
$$\begin{cases} a:b = ab':bb' \\ a':b' = ba':bb' \end{cases}$$

Or: $a:b = ab'(1:bb')$ $a':b' = ba'(1:bb')$

Donc: $(a:b) + (a':b') = (ab' + ba')(1:bb') = (ab' + ba')$

en vertu de la loi ~~de~~ distributive de la multiplication

On dit encore d'ailleurs que ~~on~~ on remplace les fractions

$(a:b)$, $(c:d)$ par des fractions égales: $(a':b')$, $(c':d')$,

leur somme est égale à la somme des premiers:

~~de plus on~~ $ad:bc = a'd':b'e'$.

Soustraction: inutile de la définir, puisqu'elle est ramenée à l'addition: $(a:b) - (c:d) = (ad - bc, bd)$

En effet: $(a:b) - (c:d) = (a:b) + (-c:d)$.

L'ensemble des nombres fractionnaires qu'on appelle, ou rationnels est donc tel que les 4 opérations y sont possibles et uniformes sans exception. Les opérations inverses sont ramenées aux opérations directes. Par l'extension qu'elles ont reçue

(1) A la rigueur, on peut se contenter d'introduire les inverses des nombres premiers.

Module: toute fraction de numérateur 0; donc: $0:d =$

Résumons la généralisation du nombre entier.

En généralisant la soustraction des nombres entiers, on a construit l'ensemble des nombres entiers qualifiés (cà d. positifs, négatifs et nul): $\dots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots$ et l'on a défini pour ces nouveaux nombres les opérations arithmétiques, en conservant leurs propriétés combinatoires. Seulement, la soustraction est toujours possible (1)

Comme les nombres positifs ont les mêmes propriétés que l'ensemble des nombres arithmétiques, on les identifie: ~~pas de confusion possible entre~~ les opérations homonymes sur les deux sortes de nombres, sauf la soustraction: ~~pas de confusion possible~~, car si la soustraction arithmétique est possible, la soustraction des n qualifiés correspondants aura un résultat positif; sinon, — négatif.

— En généralisant la division des ^{entiers} nombres qualifiés (et par suite aussi des nombres entiers absolus) on a construit l'ensemble des nombres rationnels qualifiés (de la forme: $\frac{+5}{-3}$) et l'on a défini pour ces nouveaux nombres les opérations analogues aux opérations arithmétiques, cà d. jouissant des mêmes propriétés combinatoires. Seulement la division est toujours possible (2). ~~Il s'agit de~~ Comme les nombres entiers ont les mêmes propriétés que l'ensemble des fractions de dénom. 1, on les identifie; on peut aussi assimiler les opérations homonymes, sauf la division. Seulement, si la division des entiers est possible (cà d. à pour résultat un entier), la division des fractions correspondantes a pour résultat une fraction ayant pour numérateur cet entier et pour dénom. 1.

(1) non seulement dans l'ensemble primitif mais encore dans le nouvel ensemble.

En résumé, les 4 opérations arithmétiques sont toujours posées
et uniformes dans l'ensemble des nombres rationnels qualifiés.
Elles ont conservé toutes leurs propriétés combinatoires, pour
c'est sur l'extension de leurs formules opératoires que repose
la généralisation du nombre. On remarquera le parallélisme
complet entre les formules additives des nombres qualifiés
les formules multiplicatives des nombres fractionnaires. Ce
tient à ce que les opérations correspondantes obéissent aux
mêmes lois formelles (associative, commutative). La seule
diversité vient de ~~ce que~~ la relation non symétrique qui
unit les 2 ordres d'opérations (la multiplication est distributive
par rapport à l'addition, mais non l'addition par rapport à la multiplication)

$$(a+b)c = ac + bc \quad (a \times b) + c \neq (a+c)(b+c)$$

Ces remarques suggèrent l'idée d'une Théorie générale des opérations
considérées dans leurs propriétés formelles (Stolz, Hœlzel), de leur contenu
abstraction faite de leur sens « matériel », de leur contenu
- Toutes les lois générales des nombres entiers étant justifiées
indépendantes de leur nature intrinsèque propre, et reposant
uniquement sur leurs propriétés combinatoires, restent vraies
dans l'arithmétique générale, c'est-à-dire dans l'ensemble
des nombres rationnels qualifiés. Exemple :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (n+1)(n-1) = n^2 - 1$$

Si l'on fait $a = n$ (entier), $b = 1$, on a le théorème :

Le carré de tout nombre entier est supérieur de une unité au
produit des 2 nombres qui sont ses voisins dans la suite naturelle.

Mais la formule précédente est indépendante de la nature
des nombres a, b , car elle repose sur la propriété distributive
de la multiplication par rapport à l'addition (et à la soustraction).

- On peut donc découvrir et démontrer toutes les lois générales
de l'arithmétique.

+ C'est la Logistique de Charles et de Cournot.

l'arithmétique en appliquant à des lettres les lois combinatoires des opérations arithmétiques, sans s'inquiéter de leur valeur ni même du sens réel des signes d'opération. On n'obtiendra jamais ainsi que des formules équivalentes, c'est-à-dire telles qu'elles aient la même valeur numérique, quelle que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres. L'équivalence de 2 formules, c'est leur égalité constante, indépendante des valeurs des lettres, s'appelle une identité algébrique. Le calcul algébrique consiste donc à faire abstraction de la nature des objets combinés et même de la nature des combinaisons : et c'est ce qui fait sa généralité. C'est pour lui assurer cette généralité qu'on a généralisé la soustraction et la division.

En effet, soit la formule :

$$a - b + c - d + e$$

L'ordre dans lequel s'effectuent une suite de additions et de soustractions est indifférent en arithmétique, pourvu que les soustractions successives soient toujours possibles ; or cela n'est pas, tant que a, b, c, d, e sont des nombres absolus.

Au contraire, ce sera toujours possible ^{dans le domaine} ~~si a, b, c, d, e~~ ^{la formule} ~~si a, b, c, d, e~~ sont des nombres qualifiés, car la ^{formule} ~~formule~~ précédente sera la somme des nombres qualifiés : $+a, -b, +c, -d, +e$, laquelle est toujours un nombre qualifié. Ainsi l'on peut intervertir l'ordre des termes sans aucune restriction.

Supposons maintenant que a, b, c, d, e soient des nombres qualifiés ; la formule précédente sera la somme des nombres qualifiés ; $a, +b' + c + d' + e$

b', d' désignant les nombres symétriques de b et de d .

Et comme on peut intervertir l'ordre des addit., et soustrait.

qualifiés d'une manière quelconque sans changer le résultat (puisque ces opérations sont toujours possibles), on pourra écrire par ex :

$$b + a + d + c + e \quad \text{ou} \quad -b + a - d + c + e$$

C'est ainsi amené à cette convention :

Si a est un nombre qualifié positif, $+a$ est ce nombre, et $-a$ désigne le nombre symétrique.

La ~~même~~ formule précédente sera ^{lorsque} la somme des nombres qualifiés : $+a, -b, +c, -d, +e$

pris dans un ordre quelconque.

Distinction du signe vrai et du signe apparent d'un nombre.

$$\text{Si } a = -5, \quad +a = -5, \quad -a = +5.$$

Ainsi toute formule d'addition et de soustraction se ramène à une somme de nombres qualifiés, non seulement quand les termes sont des n absolus, mais encore quand ils sont des nombres qualifiés. — Somme algébrique.

On appliquera donc dans le calcul algébrique, aux lettres les mêmes règles de signes qu'à aux nombres qualifiés.

Pour la multiplication et la division, la règle des signes subsiste en vertu de cette remarque que, dans une formule multiplicative, le nombre des signes $-$ est toujours pair : en effet

$$\begin{array}{c|c} ++ & + \\ +- & - \\ -+ & - \\ -- & + \end{array}$$

et de même pour la division (qui se réduit à la multiplication, l'inverse de a a le signe de a). Or, quand on met en évidence le signe apparent

et le signe réel d'un nombre, on trouve la même règle :

$$+(+5) = +5, \quad +(-3) = -3, \quad -(+3) = -3, \quad -(-1) = +1.$$

Par conséquent pour effectuer le produit : $(\pm a)(\pm b)$, a et b étant des nombres qualifiés, on suivra la règle des signes car si l'un ou l'autre est un nombre pair, le résultat est $+$; impair, $-$.

La règle des signes s'étend à un nombre quelconque de facteurs si le nombre des signes $-$ est pair, le résultat est $+$; impair, $-$; donc dans une formule multiplicative, le nombre de tous

les signes $-$ est pair toujours pair.

C'est comme si chaque nombre avait pour coefficient $+1$ ou -1 .

Il faut donc bien distinguer les opérations algébriques, portant sur des lettres donc affectés de signes apparents, des opérations arithmétiques portant sur des nombres qualifiés. (donc de signes réels.)

Nous venons de définir les opérations pour les monômes c'est à dire formules algébriques où ne figurent que les signes \times et $:$ (se réduisant toujours à des produits: on peut donc exclure le signe $:$.)

Définition des polynômes: Sommes algébriques de monômes (différence se ramène à somme.)

Opérations sur les polynômes: Quel en est le but?

La somme & le produit de 2 polynômes est un polynôme tel que sa valeur numérique soit toujours égale à la somme ou au produit des valeurs numériques de ces polynômes, quelle que soient les valeurs attribuées aux lettres.

Addition des polynômes: On ajoute forme un polynôme contenant tous les termes des polynômes donnés (avec leur signe.)

Soustraction des polynômes: Pour soustraire le polynôme B du polynôme A, on ajoute à A le pol B changé de signe.

En effet, si dans un ~~supplément~~ ^{polynôme} algébrique on change les signes de tous les termes, la nouvelle polynôme est le symétrique du précédent, c'est à dire prend une valeur symétrique pour toutes les valeurs numériques attribuées aux lettres. Or, en vertu de la définition de la soustraction des nombres qualifiés, retrancher un nombre, c'est ajouter son symétrique.

Multiplication des polynômes: On multiplie chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur. En vertu de la loi distributive de la multiplication des nombres rationnels qualifiés, le polynôme ainsi obtenu sera équivalent ^{au} ~~le~~ produit des deux polynômes donnés.

Parce il ne faut pas appeler fractions algébriques les quotients de nombres rationnels qualifiés, qui sont des nombres rationnels qualifiés. (voir)

Réduction des termes semblables / pour simplifier le résultat.
Chaque monome comprend un facteur numérique (coefficient) et une partie littérale. Les monomes semblables ont même partie littérale; on les réduit en la mettant en facteur commun, et faisant la somme des coefficients qualifiés.

Pour plus de généralité, on représente aussi les coefficients par des lettres (les 1^{res} de l'alphabet), et alors on adopte pour les lettres indéterminées les dernières de l'alphabet, les 1^{res} sont appelées communes et déterminées. Les autres sont dites incommunes.

Pour reconnaître plus aisément l'identité de 2 polynômes on les ordonne suivant les puissances croissantes ou décroissantes d'une lettre, dite lettre ordonnatrice.

Si il y a plusieurs lettres, les coefficients d'un polynôme ordonné peuvent être eux-mêmes des polynômes, qu'on peut ordonner par rapport à une autre lettre.

Degré d'un polynôme: nombre des facteurs simples incommuns qu'il contient: $5x^2y^3$ a degré 5; $4ax^3y^2$ a degré 5.

Degré d'un polynôme: degré du monome de degré le plus élevé.

Polynôme homogène: dont tous les termes sont de même degré d'homogénéité. Ex: $ax^4 + bx^3y + cxy^2 + dxy^3$.

On peut ordonner un polynôme homogène à 2 inconnues suivant les puissances croissantes de l'une et décroissantes de l'autre.

On a nettement distingué les opérations algébriques, propres aux formes littérales, des opérations arithmétiques, propres aux nombres (rationnels qualifiés). Il faut de même distinguer l'arithmétique générale, science des nombres généralisés, de l'algèbre, qui a pour objet les formes littérales, leurs relations et leur équivalence. L'algèbre a pour objet essentiellement les polynômes.

L'Algèbre est l'étude des polynômes, spécialement entiers (monômes entiers, c'est-à-dire non fractionnaires.)

On peut toujours prendre un polynôme entier. C'est-à-dire pour l'égalité, l'équation, leur somme, et leur produit, ~~ainsi que leur quotient~~ ^{ce qui en fait des} ~~autres mathématiques.~~

On peut toujours ~~ce qui en fait des~~ ^{autres mathématiques.} ~~réduire et~~ ^{ordonner} un polynôme.

Cette opération est seulement commode pour effectuer l'addition et la multiplication; elle est nécessaire pour la division; il convient même que les polynômes

soient ordonnés suivant les puissances décroissantes de la même lettre. (On suppose d'ordinaire que les polynômes ne contiennent qu'une inconnue.)

La division est possible quand le dividende est le produit du diviseur B par un polynôme Q , dit quotient.

Dans ce cas, le 1^{er} terme du dividende est le produit des 1^{ers} termes du diviseur et du quotient; de même le dernier terme; en vertu de la règle de multiplication.

Donc le 1^{er} terme du quotient est le quotient du 1^{er} terme du dividende par le 1^{er} terme du diviseur; de même pour le dernier terme. D'où la règle de division.

Remarques: La division algébrique a sur la division arithmétique l'avantage que le résultat de chaque division partielle est toujours exact.

Pour que la division ne rencontre aucun obstacle, il faut que toutes les soustractions puissent se faire, et que les 1^{ers} coefficients des restes partiels soient divisibles sans exception par le 1^{er} coefficient du quotient.

Pour cela, il suffit que les coefficients appartenant à l'ensemble des n est. qual. ou soustr. et div. sont possibles sans restriction.

[N.B: C'est pourquoi on considère les n . qualifiés comme algébriques; ils ne le sont pas plus que les n . fractionnaires.]

Si la division n'est pas possible, comme on ne le sait pas d'avance, on l'essaie (ce qui suppose que le degré du diviseur est inférieur à celui du dividende). Les divisions partielles sont possibles tant que le reste partiel est de degré au moins égal à celui du diviseur. Or le degré de chaque reste partiel est inférieur de 1 unité au moins à celui du précédent. Donc, au bout d'un nombre fini d'opérations, on arrive soit à un reste identiquement nul, soit à un reste de degré inférieur au diviseur: dans ce dernier cas, la division est impossible; mais on a:

$$R = A - BQ.$$

Si l'on appelle encore quotient le polynôme obtenu Q , on dira que le quotient des 2 polynômes A et B est un polynôme tel que la différence $A - BQ$ soit un polynôme de degré inférieur à B celui de B .

Identité de la division:

$$A = BQ + R$$

avec la condition: degré de $R < \text{degré de } B$.

On démontre que le quotient et le reste d'une division sont uniques et bien déterminés.

Le cas où la division est possible devient le cas particulier où le reste R est identiquement nul. On écrit alors:

$$A = BQ$$

$$Q = \frac{A}{B}.$$

Dans tout autre cas, la formule $\frac{A}{B}$ ne représente pas un polynôme entier: elle pourra être évaluée en un nombre fractionnaire (ou non entier). C'est ce qu'on appelle une fraction algébrique rationnelle. Le calcul des fractions algébriques est soumis à des règles analogues à celui des fractions arithmétiques, parce que les premières représentent au fond les secondes.

N.B.: Bien distinguer les fract. algb. des fractions numériques qualifiées.

C'est le premier exemple d'une opération possible numé-
rig^e et impossible algébriq^e, ou plutôt, d'une opération alg.
impossible correspondant à une opération arith. possible.
Cela n'a rien d'étonnant, puisque le résultat de l'opérat.
alg. doit être une formule générale qui contiennent tous
les résultats numériques de l'opération arithmétique.

Ainsi une fraction algébrique a toujours un ~~numérateur~~ ^(en x)
~~tant qu'on restait irréductible~~

Analogie entre les polynômes entiers et les nombres entiers.
La division seule n'est pas toujours possible. Les polynômes
possèdent donc des propriétés spéciales ~~aux~~ au point de vue
de la divisibilité.

Théorème de Gauss: Si un polynôme à coefficients entiers
est décomposable en un produit de 2 polynômes, ceux-ci
sont encore à coefficients entiers.

Il suffit donc de considérer les polynômes entiers à
coefficients entiers sans ~~diviseurs~~ ^{fact.} communs (car ces fac-
teurs seraient des diviseurs numériques du polynôme).
Tous leurs diviseurs seront des polynômes de même forme.

Algorithme d'Euclide pour trouver le P.G.C.D. de
deux polynômes. Repose sur l'identité de la division, et
sur le principe de régression finie. Tout polynôme qui
divise A et B divise aussi BQ, et par suite A - BQ = R.

Ainsi de suite. Les restes successifs sont de degrés décroissants.
on doit arriver à un reste numérique (de degré 0). Si ce reste
est 0, le dernier diviseur est le P.G.C.D. cherché; sinon,
il n'y a pas de P.G.C.D. Les polynômes sont premiers
entre eux (sans diviseur commun).

Tout diviseur commun à A et B diviseur P.G.C.D.
Si A et B ont pour p.g.c.d. D , AM et BM ont pour p.g.c.d. DM . Si A et B sont premiers entre eux, AM et BM ont pour p.g.c.d. M (Tout cela résulte de l'algorithme de Euclide.)

Théorème fondamental: Tout P un polynôme C divisant le produit de 2 polynômes A, B et est premier avec l'un d'eux (A), il doit diviser l'autre (B)

En effet, si A et C sont premiers entre eux, le p.g.c.d. de AB et BC doit être B . Or C divise AB et BC ; donc il doit diviser leur p.g.c.d. B .

Corollaires: Tout polynôme est irréductible ou admet un diviseur irréductible (D'ad; existence des polyn. irréductibles)

Tout polynôme réductible est un produit de polynômes irréductibles; et cette décomposition ne peut avoir lieu que d'une seule manière, en vertu du théorème fondamental qui engendre le corollaire suivant:

Un polynôme irréductible C qui divise le produit de 2 pol. A et B divise nécessairement l'un d'eux (car s'il ne divise pas A , il est premier avec A ; donc il divise B .)

Un polynôme irréductible qui divise un produit de polyn. irréductibles est identique à l'un d'eux.

D'où l'on conclut l'unicité de 2 décompositions d'un même polynôme en facteurs irréductibles!

Remarque Toutes ces propositions sont analogues au plus identiques par la forme aux propos. touchant la divisibilité des nombres entiers; cela vient de ce qu'elles sont des conséquences formelles de l'algorithme de Euclide. On a ainsi un exemple d'un enchaînement de vérités formelles indépendantes de leur contenu, c-à-d. de des objets auxquels elles s'appliquent.

mais il y a des polynômes irréductibles de tous les degrés : ex: $x^n + 2$ 61

Divisibilité par $(x-a)$ (Tous les binômes du 1^{er} degré sont évidemment irréductibles.)

Le reste de la division d'un polynôme entier en x par $(x-a)$ est égal au nombre qu'on obtient en donnant à x la valeur a dans ce polynôme.

Corollaire $P(x) = (x-a)Q(x) + R$

R indépendant de x ; donc: $P(a) = R$.

Corollaire: Pour qu'un polynôme entier en x soit divisible par $(x-a)$, il faut et il suffit qu'il s'annule quand on y donne à x la valeur a : $P(a) = 0$.

- Pour qu'un polynôme entier en x soit divisible par le produit de plusieurs binômes différents, il faut et il suffit qu'il soit divisible séparément par chacun d'eux.

Corollaire: Lorsqu'un polynôme entier en x , de degré m , s'annule pour m valeurs différentes a, b, c, \dots, l attribuées à x , il est équivalent au produit:

$$A(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-l)$$

A étant le coefficient de son terme de degré le plus élevé.

- Lorsqu'un polynôme entier réduit est équivalent à zéro, il est identiquement nul, c'est-à-dire que tous ses coefficients sont nuls.

Corollaire: Deux polynômes entiers réduits équivalents sont identiques (égaux terme à terme.)

Lorsqu'un polynôme entier en x , de degré m , s'annule pour plus de m valeurs distinctes de x , il est équivalent à zéro, donc identiquement nul.

- En somme, l'Algèbre est comme l'arithmétique des polynômes: les polynômes en sont les éléments, comme les nombres ceux de l'arithmétique.

L'Algèbre comprend la théorie des équations : c'est la recherche des valeurs ^{des inconnues} qui annulent les polynômes.

Une équation est une égalité conditionnelle entre deux formules ^{qui n'est pas une identité}. Les membres ne sont pas égaux d'eux-mêmes. Les formules contenant des inconnues, ~~en fait~~ ^{en fait} elle est une condition que ces inconnues doivent vérifier. Elle a donc pour effet de restreindre leur indétermination.

Théoriquement, et en général, il faut n équations pour déterminer n inconnues. En effet, on peut tirer de l'une d'elles l'expression de x_i en fonction des $(n-1)$ inconnues, et porter celle-ci dans les $(n-1)$ autres équations; on a un système de $(n-1)$ eq. à $(n-1)$ inc. On le réduit de même, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on n'ait plus qu'une équation à 1 inconnue. Nous nous occupons seulement des équations de ce type. (à 1 inconnue.)

Dans une équation quelconque, on peut chasser les dénominateurs, (faire disparaître les radicaux) et faire passer tous les termes dans un membre (le 1^{er} par ex.), le 2^e étant 0. Le 1^{er} membre est alors un polynôme entier en x , de degré n .

Il s'agit de trouver les valeurs de x qui ^(rationnelles) l'annulent : ce sont les racines de l'équation (ou du polynôme).

On peut rendre tous les coefficients entiers, ^{en les} par multiplication par le p.p.c.m. des dénominateurs; on rend le 1^{er} coefficient égal à 1, en divisant tous les autres par lui.

On suppose que le polynôme n'est pas identiquement nul; dans cette hypothèse, on sait qu'il ne peut avoir plus de m racines distinctes.

(1) C'est alors (et alors seulement) qu'on peut dire que l'équation est elle-même de degré m .

Si le polynôme a m racines distinctes, on sait qu'il est équivalent à : $A(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-l)$

Or deux polynômes réduits équivalents sont identiques.

On peut donc construire le polynôme qui a ces m racines.

(Supposons, pour simplifier, $A = 1$.)

Le 1^{er} terme sera x^m ; et le 2^e terme x^{m-1} aura pour coefficient $-\Sigma a$; le 3^e, x^{m-2} , aura pour coeff. $+\Sigma ab$; le 4^e, x^{m-3} , $-\Sigma abc$; etc. enfin le dernier terme (indépendant de x) sera le produit $(-a)(-b)(-c) \dots (-l) = (-1)^m \Pi a$.

Les polynômes: $\Sigma a, \Sigma ab, \Sigma abc, \dots$ et Πa

s'appellent les fonctions symétriques élémentaires des racines: symétriques, parce qu'elles ~~ne~~ ne changent pas quand on y remplace une racine par une autre, ou quand on permute leur ordre. On les désigne par S_1, S_2, \dots, S_m .

Si de autre part on écrit le polynôme sous la forme:

$$x^m - p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} - \dots + (-1)^m p_m,$$

on doit avoir les ~~égalité~~ ^{égalités} suivantes:

$$S_1 = p_1 \quad S_2 = p_2 \quad \dots \quad S_m = p_m.$$

Ces m équations déterminent les m racines inconnues; elles peuvent donc remplacer l'équation proposée, c'est-à-dire les m égalités: $f(a)=0, f(b)=0, \dots, f(l)=0$.

— Réciproquement, si un polynôme peut se décomposer en un produit de ^m binômes du 1^{er} degré, il aura m racines.

~~En effet, pour qu'un polynôme s'annule pour $x=a$, il faut et il suffit qu'il soit divisible par le binôme $(x-a)$, or pour que le binôme $x-a=0$, il faut que $x=a$.~~

En effet, pour qu'un produit s'annule, il faut et il suffit qu'un de ses facteurs s'annule. Donc si le binôme $(x-a)=0$, il faut que $x=a$.

qualifiés: car elle permet de faire passer tous les termes ~~à~~ ^{en x} dans
un membre: $ax = b$ ~~$ax + b = 0$~~ $ax = -b$
et de diviser par a (supposé $\neq 0$) d'où: $x = \frac{-b}{a}$.

On trouve ~~pour~~ toujours pour x une valeur rationnelle, pourvu que a et b soient eux-mêmes rationnels.

Pour l'équation du 2^e degré, on ne peut plus affirmer qu'elle a toujours une racine rationnelle. En effet, on peut toujours la mettre sous la forme:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad x^2 + px = -q$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px = -q$$

$$x^2 + pax + \frac{p^2}{h} = \frac{p^2}{h} - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$x + \frac{p}{q} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{h} - q} \quad (1)$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Pour que cette formule algébrique ait un sens numérique, il faut que $\frac{p^2}{4} - q$ ait ~~une racine carrée~~ ^{soit un carré parfait}, ce qui est un cas exceptionnel. D'abord, il faut que $(\frac{p^2}{4} - q)$ soit positif (aucun carré n'étant négatif). Ensuite, il faut que ce soit un entier ou une fraction carré parfait. Hors de ce cas, il n'y a pas de nombre qui soit représenté par le radical $\sqrt{\quad}$, donc pas de racine ~~ou~~ d'équation.

N. B. Les nombre irrationnels $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, n'ont pas de den
en arithmétique: ce ne sont pas des nombres, car si l'on en au
de les calculer, on n'y parvient pas: ils sont incalculables.
On dit qu'on en calcule des valeurs approchées autant
qu'on le désire: mais approchées de quoi? puisque la
valeur exacte n'existe pas.

(1) Car a^2 est le carré de $+a$ comme de $-a$.

leçon.

Une équation de degré quelconque a-t-elle une racine (rationnelle) ? Non, puisqu'il y a des polynômes irréductibles (sans diviseurs rationnels). Ex.

$$(x^n + 2) \quad x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 \quad (p \text{ premier})$$

Pour que toute équation algébrique ait une racine, il faut étendre le domaine dans lequel doit se trouver cette racine, c'est-à-dire généraliser encore la notion de nombre.

On introduit d'abord les nombres irrationnels, qui, ajoutés à l'ensemble des nombres rationnels, forment un ensemble continu linéaire (à 1 dimension). Dans cet ensemble, des nombres réels, un nombre positif quelconque a une racine d'ordre quelconque : autrement dit, l'équation :

$$x^n - a = 0 \quad \text{est résoluble si } a > 0.$$

Seulement ~~le~~ ^{un} nombre négatif n'a pas de racines d'ordre pair. C'est ~~en~~ ^{un} une exception et un obstacle.

On crée alors l'ensemble des nombres imaginaires ou complexes, dont chacun est formé de 2 nombres réels accouplés. Cet ensemble est continu à 2 dimensions, parce qu'il y a 2 éléments qui varient indépendamment ; et faut 2 conditions pour définir l'égalité de 2 nombres. Dans cet ensemble, on définit toutes les opérations arithmétiques ; l'extraction des racines y est toujours possible, même pour les racines d'ordre pair des nombres négatifs ; un nombre quelconque de l'ensemble a m racines d'ordre m. En somme, c'est un ensemble où toutes les opérations arithmétiques sont possibles sans restriction.

Six

+ l'entre l'ensemble des nombres réels comme cas particulier des nombres complexes (le 2^e élément est nul.)

Cela posé, on conçoit (avec Descartes) l'inconnue x comme une variable indépendante, pouvant passer avec continuité par une suite de valeurs réelles et irrationnelles en particulier. Les coefficients du polynôme sont également des nombres complexes, mais connus et constants. Dans ces conditions, pour chaque valeur de x le polynôme prend une valeur complexe bien déterminée; il établit une correspondance entre la suite des valeurs de x et une suite d'autres valeurs qu'on peut figurer par une variable dépendante y : en somme le polynôme est conçu comme une fonction de x : c'est ce qu'on appelle une fonction entière: $y = f(x)$.

On démontre que, quand x varie d'une manière continue, y varie d'une manière continue, c'est-à-dire que est une fonction continue de x . Dès lors, la fonction entière jouit des propriétés des fonctions continues: elle ne peut passer d'une valeur à une autre sans prendre toutes les valeurs intermédiaires. En particulier, elle ne peut passer du positif au négatif, ou inversement, sans prendre la valeur 0. On admettra ainsi de savoir quand elles s'annulent, et par suite, de séparer des racines, c'est-à-dire de déterminer les intervalles où elles s'annulent.

Grâce à la continuité, on démontre qu'une fonction entière à coefficients complexes d'une variable complexe a toujours une racine complexe, c'est-à-dire qu'il existe dans l'ensemble des nombres complexes une valeur qui attribué à x , annule la fonction (le polynôme). Quand on dit affirmer ce théorème d'un polynôme à coefficients réels, rationnels ou même entiers, il faut bien entendre que ces coefficients sont conçus comme complexes et identifiés aux nombres complexes correspondants (Méray).

✕ Puis on resserre progressivement l'intervalle pour obtenir une valeur exacte ou approchée de la racine qu'il contient: Résolution numérique des équations.

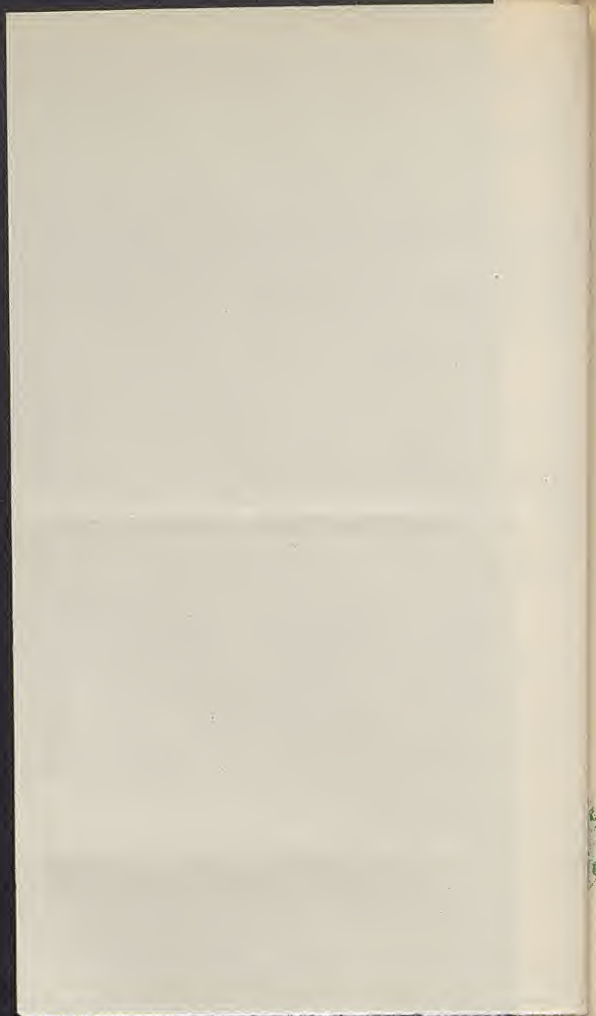
olk: Théorie générale de l'élimination:

C'est Descartes qui le premier considéra
l'équation d'une équation: $f(x) = 0$

et la recherche des restrictions apportées
à la variabilité de la quantité essentielle
est variable x , par la condition
imposée: $f(x) = 0$. Avant lui,
l'avait envisagé la résolution des
équations que comme la recherche des
racines qui, substituées aux inconnues,
sont les équations. »

Thèse (1887)

Acta mathematica, t. VI.



Or en procédant ainsi, on fait de l'analyse; on fait appel à l'idée de continuité, c'est-à-dire la notion de grandeur, car le nombre n'enveloppe nullement le continu, il y répugne, au contraire. On considère des variations continues, une variable indépendante et une ^{avec ses dérivées} fonction considérations étrangères à l'algèbre, ou il ne s'agit que de calculer des nombres inconnus au moyen de nombres connus auxquels ils sont liés par certaines relations (équations). L'algèbre se fond pour ainsi dire dans l'analyse, et les polynômes se perdent parmi les fonctions analytiques.

D'autre part, le problème était de trouver des racines pour toute équation algébrique à coefficients rationnels (ou même entiers) car, en somme, c'est de l'ensemble des nombres entiers qu'on part, et il n'existe en définitive que celui-là. Or l'ensemble des nombres ~~rationnels pour que les~~ ^{algébriques} racines de telles équations, ne forme qu'une infime minorité dans l'ensemble des nombres complexes et même dans celui des nombres réels: car il n'est pas continu. On a donc dépassé le but énormément: on a créé infiniment plus de nombres qu'il n'est nécessaire pour résoudre les équations à coefficients rationnels. Parmi les nombres irrationnels (réels) et a fortiori parmi les nombres complexes, il y a infiniment plus de nombres transcendants que de nombres algébriques. Il y a une disproportion énorme entre le moyen et la fin, entre l'ensemble continu à 2 dimensions qu'on a dû construire pour établir l'existence des racines de toute eq. alg. et l'ensemble de ces racines elles-mêmes. Encore une fois, l'algèbre se noie dans l'analyse.

C'est ces considérations qui ont déterminé les algébristes
modernes à essayer d'une autre méthode, plus logique et plus
économique. Ils se sont astreints à ne pas sortir du domaine
de l'arithmétique, et se sont proposés de créer strictement
les nombres nécessaires et suffisants à la résolution des équations
algébriques à coefficients entiers; autrement dit, de construire
l'ensemble des nombres algébriques sans faire appel à aucun
nombre transcendant et à aucun raisonnement analytique.
Mais alors, on ne peut plus démontrer l'existence d'une racine
pour toute équation algébrique: car dire qu'une racine existe,
~~c'est dire~~ une racine d'une équation, c'est dire que cette équation
est vérifiée par un nombre appartenant à un ensemble défini
et connu préalablement. Or, ~~tout~~ au contraire, on ne peut
à présent définir les nombres algébriques que comme racines
des équations algébriques. Leur existence n'est plus que l'objet
d'une définition ou d'un postulat: on les crée par un acte
arbitraire de l'esprit. ~~Tout~~ Une telle définition est légitime,
pourvu qu'elle ne soit ni contradictoire ni équivoque. On
démontre qu'elle ne donne lieu à aucune contradiction.
Mais elle donne lieu du moins à une certaine ambiguïté,
parce qu'en attribuant en bloc n racines à chaque équation
irréductible de degré n , on n'a aucun moyen de les distinguer,
puisque elles sont définies symétriquement ^{ont une seule définition commune} et symétriques.
Elles sont donc ~~indiscernables~~ ^{déterminées} à l'ordre près; et si on les range
en deux ordres différents, les 2 systèmes de racines seront indis-
cernables, puisqu'ils vérifieront également la même équation.
C'est ce qui explique l'interversion de la science de l'ordre dans
la résolution algébrique des équations.

Résoudre algébriquement une équation, c'est trouver une fonction algébrique des coefficients qui, substituée à l'inconnue, satisfasse identiquement à l'équation. Une fonction ^{est} algébrique quand elle peut s'exprimer au moyen des opérations de l'arithmétique: en particulier au moyen de ~~radicaux~~ ^{l'extraction} des racines: c'est pourquoi une eq. résoluble alg.^è est dite aussi résoluble par radicaux. L'extraction des racines équivaut à la résolution numérique des équations binômes: $x^n = A$, de sorte que la résolution algébrique consiste à ramener la résolution numérique d'une eq. à celle d'eq. binômes.

Lagrange ramena la résolution alg. des n premiers degrés à une méthode générale qui consiste à ^{déterminer} une fonction rationnelle linéaire des racines, en tenant compte des diverses valeurs qu'elle prend par la substitution des racines (cà d. l'interversion de leur ordre).

Abel démontra l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales de degré supérieur à 4. Il trouva une classe d'équations résolubles par radicaux, dites équations abéliennes (eq. irréductibles dont les racines peuvent s'exprimer en fonction rationnelle de l'une d'elles). Exemples: les équations de la division du cercle (étudiées par Gauss), $x^n = 1$.

Galois ~~présenta~~ ^{développa} la théorie des équations sur sa base définitive, en montrant qu'à chaque équation correspond un groupe de substitutions dans lequel se reflètent ses substitutions à la considération de l'équation celle des relations

+ acquies distingué de Abel, suivant la remarque de Kronecker.

entre les racines et les coefficients :

$$S_1 = p_1, \quad S_2 = p_2, \quad \dots \quad S_n = p_n,$$

S_1, S_2, \dots, S_n étant les fonctions symétriques élémentaires des racines. On voit que l'ordre des racines est indifférent. Si on les permute de toutes les manières, il y aura des ~~permutations~~ ^{substitutions} qui ne changeront pas $f(x)$, et d'autres qui le feront varier. L'ensemble des premières forme le groupe de l'équation. Ce groupe caractérise le degré de symétrie qui existe entre les racines. Ainsi à chaque équation correspond un groupe de substitutions, dans lequel se reflètent ses caractères essentiels, notamment ceux qui ont trait à sa résolution par des équations auxiliaires. Étant donné une équation quelconque, et suffit de connaître une de ses propriétés caractéristiques pour déterminer son groupe, d'où l'on déduit réciproquement toutes ses autres propriétés. (Jordan)

Galois conçoit la résolution algébrique d'une équation comme l'expression de ses racines au moyen des racines d'équations auxiliaires ou adjointes. Une équation irréductible (dans le domaine rationnel) devient réductible par l'adjonction d'une irrationnelle définie comme racine d'une équation auxiliaire ; et en même temps, le groupe de l'équation se simplifie et se réduit. On divise ainsi progressivement la symétrie des racines, c'est-à-dire leur indistinction, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus les permuer (le groupe ne contient que la substitution identique).

Le problème de la résolution par radicaux n'est plus qu'un cas particulier : il correspond au cas où les équations adjointes sont des équations binômes.

avec la réduction progressive d'une équation et parallèle à la réduction de son groupe. [Conclusion de Galois :

Pour qu'une équation irréductible de degré premier soit résoluble, il faut et il suffit que son groupe soit composé uniquement de substitutions linéaires. Dans ce cas, toutes les racines sont exprimables en fonction rationnelle de 2 quelconques d'entre elles.]

En résumé, l'Algèbre n'est pas une science indépendante et qui se suffise à elle-même. Le théorème fondamental de l'Algèbre est une proposition de l'Analyse, et la résolution numérique des équations repose sur des considérations analytiques. Quant à la résolution algébrique, elle fait appel à l'ordre de l'idée à tel point que la théorie des équations se confond avec la théorie des substitutions. Ainsi l'Algèbre ne s'achève que dans l'Analyse et dans la Synthétique; issue de l'idée de nombre, elle est obligée de recourir aux idées d'ordre et de grandeur.

12^e leçon (suite) à la page 78.

Le théorème : « Si un polynôme $f(x)$ a pour racine a , il est divisible par $(x-a)$; et réciproquement » ramène la recherche des racines à celle des diviseurs, c'est-à-dire la théorie des équations à la th. de la divisibilité des polynômes.

Cette remarque a une portée générale.

Si l'on définit n symboles comme racines de l'éq. irréductible de degré n . $f(x) = 0$
toutes les relations rationnelles qui vérifient ces n

symbols sont des conséquences nécessaires de l'éq. $f(x)=0$
 c'est-à-dire que tous les polynômes qui s'annulent pour une de
 ces symbols sont divisibles par le polynôme $f(x)$, qu'ils
 sont censés annuler. S

Ainsi le calcul des x , nombre algébrique x , se réduit à celui
 des polynômes entiers en x (x indéterminée), en négligeant
 les multiples de $f(x)$; autrement dit, à un calcul de
 congruences $[\text{mod. } f(x)]$.

On parvient ainsi à employer les nombres algébriques,
 qui, selon Kronecker, sont de purs symbols, des abréviations
 de langage. Par ex. on se dispense d'introduire certains artifices
 les nombres irrationnels tel que $\sqrt{2}$ en remplaçant l'éq. :

$$F(\sqrt{2})=0 \quad \text{par la congruence: } F(x) \equiv 0 \pmod{x^2-2}$$

De même, on se dispense d'introduire les nombres imaginaires
 (c'est-à-dire le symbole $\sqrt{-1}$) en remplaçant les équations entre
 n. imaginaires par des congruences $[\text{mod. } x^2+1]$.

Remarque: C'est le développement d'une idée de Galois: on
 introduit une nouvelle quantité en adjoignant une équation
 à celle qu'on considère, et en considérant cette équation
 comme vérifiée, ce qui revient à annuler les multiples de son
 1^{er} membre.

En somme, cette conception, où l'on se passe de toutes les
 généralisations du nombre, aboutit à réduire l'algèbre à
 la théorie des fonctions entières à coefficients entiers de nombres
 (entiers) indéterminés. Une telle fonction prise entre un ensemble
 de nombres entiers, et rien de plus. L'algèbre n'est plus qu'un
 prolongement de l'arithmétique: elle repose tout entière sur la
 notion de divisibilité: il n'est plus question d'équations à résoudre
 ni de nombres algébriques. (cf. conclusion de Molk.)

S On dira que $F(x)$ a pour racine un n. alg. défini par $f(x)=0$,
 si $F(x)$ est divisible par $f(x)$, c'est-à-dire: $F(x) \equiv 0 \pmod{f(x)}$
 (Voir la suite page 79)

Le résultat ultime de la généralisation algébrique du nombre est l'ensemble des nombres algébriques. Cet ensemble forme l'objet d'une arithmétique générale, la plus générale de toutes.

On appelle nombre algébrique toute racine d'une équation algébrique entière, à coefficients entiers :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Une telle équation a n racines, soit par construction préalable de l'ensemble des nombres complexes, soit par ~~definition~~ convention. Dans ce dernier cas, elle suffit à définir ces n nombres algébriques (à l'ordre près.)

On peut indifféremment supposer les coefficients entiers ou entiers; car s'ils sont fractionnaires, on les rendra tous entiers en les multipliant par un même nombre entier.

Un nombre algébrique est entier quand $a_0 = 1$.

Supposons $a_0 \neq 1$; multiplions par a_0^{n-1} :

$$a_0^n x^n + a_0^{n-1} a_1 x^{n-1} + a_0^{n-2} a_2 x^{n-2} + \dots + a_0^{n-1} a_{n-1} x + a_n a_0^{n-1} = 0$$

Posez : $a_0 x = y$.

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 a_0 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} a_0^{n-2} y + a_n a_0^{n-1} = 0$$

Les n racines y_1, y_2, \dots, y_n de cette nouvelle équation sont des nombres algébriques entiers; or les n racines x_1, x_2, \dots, x_n de la 1^{re} s'obtiennent en les divisant par a_0 . D'où :

Théorème. Les nombres algébriques non entiers sont les quotients des nombres alg. entiers par des n entiers.

On peut se contenter d'étudier les n alg. entiers.

La somme, la différence, le produit de 2 nombres alg. entiers sont aussi des nombres algébriques entiers.

Un nombre alg. entier α est divisible par le n alg. entier β si l'on a : $\alpha = \beta\gamma$, γ étant un n. alg. entier.

On appelle unités les nombres qui divisent tous les nombres algébriques entiers.

Toute unité divise 1; tout diviseur de 1 est une unité.

Le produit et le quotient de 2 unités est une unité.

Deux nombres associés sont divisibles l'un par l'autre.

Chacun d'eux est le produit de l'autre par une unité:

$$\alpha' = \alpha \varepsilon, \quad \alpha = \alpha' \varepsilon' \quad \varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tout nombre alg. entier est décomposable en facteurs alg. entiers, et cela d'une infinité de manières. En:

$$\alpha = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha}, \quad (\beta^2 - \beta + \alpha = 0).$$

ou bien : $\alpha = \beta_1 \beta_2$, β_1, β_2 étant racines de:

Il n'y a donc pas, dans l'ensemble des n. alg. entiers, de nombres premiers.

Il n'en est plus de même dans un corps fini relatif à une équation irréductible de degré n: $f(x) = 0$.

Soit θ une de ces racines; l'ensemble des nombres de la forme: $w = a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + \dots + a_{n-1} \theta^{n-1}$

constitue le corps fini Ω (a_0, a_1, \dots, a_{n-1} nombres rationnels ^{de degré n.}).

Propriété caractéristique du corps: la somme, la différence, le produit et le quotient de 2 nombres de l'ensemble appartiennent encore à cet ensemble.

Tout corps fini contient l'ensemble des nombres rationnels qualifiés: car il doit contenir $1 = \frac{a}{a}$.

Si l'on choisit n nombres indépendants w_1, w_2, \dots, w_n , tout nombre du corps pourra s'exprimer (et d'une seule manière) en fonction linéaire de ces n nombres, c'est-à-d. sous la forme:

$$w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n$$

a_1, a_2, \dots, a_n étant des nombres rationnels. L'ensemble des n nombres w forme une base du corps Ω .

On peut trouver ^{dans certains cas} une base composée de nombres alg. entiers, et telle que tous les nombres alg. entiers du corps soient des fonctions linéaires à coefficients entiers de ces nombres:

$$\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n.$$

En d'autres termes, l'ensemble des n. alg. entiers du corps Ω est l'ensemble des multiples des nombres α et des sommes de ces multiples. C'est un module, c'est-à-d. un ensemble de nombres tels que la somme et la différence de 2 n. quelconques de l'ensemble appartiennent au même ensemble.

N. B. Cela n'a pas lieu pour un corps fini quelconque.

Dans l'ensemble des nombres alg. entiers d'un corps fini, ^{certain} il existe des nombres indécomposables en produit de 2 autres, ^(dont aucun n'est une unité) mais ces nombres ne jouissent pas de la propriété fondamentale des nombres premiers: à savoir, que tout nombre premier qui divise un produit de 2 facteurs divise l'un d'eux. Il en résulte qu'un nombre est décomposable en général de plusieurs manières en produit de facteurs indécomposables. On a par ex. des égalités de la forme:

$$ab = cd$$

a, b, c, d étant des nombres indécomposables. On voit que c divise le produit ab sans diviser ni a ni b .

Pour remédier à cette difficulté et rendre la divisibilité
des nombres algébriques semblable à celle des nombres entiers,
Kummer a eu l'idée de considérer les nombres indécom-
posables comme des produits de facteurs premiers idéaux.
Par ex: soion admet que: $a = \alpha\beta$, $b = \gamma\delta$,
 $c = \alpha\gamma$, $d = \beta\delta$,

on aura l'égalité: $ab = cd$ ^{donc} $\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\beta\gamma\delta$
identité entre 2 produits de facteurs premiers.

Or cette hypothèse réussit, c'est-à-dire que les nombres idéaux
ainsi imaginés et définis jouent le rôle de facteurs premiers;
ils possèdent toutes les propriétés des nombres premiers, et
par suite tous les théorèmes de divisibilité valent pour
les nombres algébriques entiers, en partie. celui qui les
résume tous: ^{grâce à la notion du nombre idéal}

Un nombre alg. entier, ou bien est premier, ou bien
est décomposable d'une seule manière en un produit de
facteurs premiers (réels ou idéaux).

Comme il est assez scabreux de raisonner sur des nombres
idéaux (irrédels), M. Dedekind a cherché à s'en passer, et
s'est efforcé de définir les relations de divisibilité sans
sortir du domaine des nombres algébriques réels. Or
il a remarqué que les ^{nombre alg. entiers} ~~les~~ divisibles
par un même nombre idéal sont caractérisés par
certaines propriétés, c'est-à-dire vérifient certaines relations
(congruences) entre termes réels. Il suffit donc de
considérer ces propriétés comme définissant leur
ensemble qu'il appelle un idéal. Ainsi un idéal
est l'ensemble des n. alg. ent. réels divisibles par un nombre
idéal de Kummer.

D'autre part, les idéaux jouissent des propriétés caractéristiques suivantes:

La somme et la différence de 2 nombres d'un idéal sont des nombres du même idéal;

Le produit d'un nombre de l'idéal par un nombre algébrique quelconque ^{est un nombre} appartient à cet idéal.

Des lors, on peut ~~prendre~~ ^{se servir} définir les idéaux par ces propriétés purement arithmétiques, et se passer de la considération des nombres idéaux.

Certains idéaux correspondent à des n. alg. réels, c'est à dire à l'ensemble des multiples d'un n. alg. réel entier.

On les appelle des idéaux principaux. Exemples.

On définit la multiplication et la divisibilité des idéaux: ce qui remplace la multiplication et la divisibilité des nombres idéaux correspondants.

On retrouve comme cas particulier la divisibilité des nombres entiers: ainsi, un idéal A est divisible par un idéal B quand il est contenu dans cet idéal.

Par ex: l'idéal principal: $6, 12, 18, 24, \dots$

est contenu dans les idéaux: $2, 4, 6, 8, 10, \dots$

et: $3, 6, 9, 12, 15, \dots$

parce que 6 est divisible par 2 et par 3.

En résumé, la divisibilité des idéaux équivaut à la divisibilité des nombres corresp. mais elle est plus générale, ou du moins a l'avantage de reposer sur des faits du domaine des nombres algébriques réels. On définit

On peut alors démontrer l'théorème fondamental: les idéaux premiers, qui correspondent aux n. idéaux premiers.

Si un idéal premier divise le produit de n idéaux, il divise l'un d'eux; d'où l'on conclut:

Tout idéal qui n'est pas premier peut se décomposer d'une seule manière en un produit d'idéaux premiers (en nombre fini).

De lors, tout se passe comme en arithmétique. C'est ainsi que la Théorie des congruences a été traitée expressément sur la Théorie des équations, la Théorie des nombres algébriques a été imitée de la Théorie des nombres entiers, & l'on a ~~insuccès~~ cherché à rendre l'analogie et le parallélisme complets. ~~Il en sort deux~~ Cela suggère deux remarques intéressantes.

1° Lorsque l'on a pu établir, pour un ensemble quelconque d'objets, un enchaînement de propositions résultant logiquement de quelques ~~propositions~~ ^{hypothèses}, à tout ensemble qui vérifie ces hypothèses ~~on~~ on peut appliquer toutes ces propositions (il y a identité formelle entre les 2 groupes de vérités).

2° On peut remplacer l'étude directe d'un objet par la considération d'un ensemble d'objets qui sont dans une relation définie avec cet objet, pourvu qu'on puisse définir cet ensemble par une propriété caractéristique indépendante de l'existence de cet objet. Nous allons voir justement une application de cette remarque dans la conception arithmétique de l'anneau, dans l'idéal est de se passer des nombres algébriques (tandis qu'un idéal de l'ancien arithmétique devait être l'ensemble des racines possibles pour une équation: l'idéal est pratique, l'idéal moderne est logique).

(Suite p. 71.)

Selon Molt, toutes les méthodes employées en Algèbre reviennent à la recherche du plus grand commun diviseur. La notion de divisibilité domine l'Algèbre tout entière, comme l'arithmétique.

En fond, au point de vue purement arithmétique de Kronecker, il n'y a d'autre que le nombre entier. Toutes les autres espèces de nombres, y compris les nombres rationnels qualifiés, ne diffèrent que par rapport aux nombres entiers, et peuvent être évités & remplacés par des systèmes de relations (congruences) où n'intrent que des nombres entiers. Les nombres algébriques ne sont que des symboles, des abréviations de langage qui servent à désigner certains faits de divisibilité.

Sur la généralisation arithmético-algébrique du nombre se ruine elle-même et s'évanouit, quand on la pousse à l'extrême rigueur logique. Toutes les extensions du domaine du nombre sont fictives; ~~et sont~~ ^{on croit en} ~~sortir~~; on est sans cesse ramené, ~~on y rentre~~ ^{on y rentre} ou plutôt on ne la jamais quitte ni dépasse.

Les nombres algébriques (y compris les n rationnels qualifiés) n'ont donc ~~pas d'existence~~ ^{hypothétique} ~~par raison d'être~~ ^{du être}. Ce ne sont que de purs symboles vérifiant par définition certaines relations formelles, et auxquelles on peut appliquer sans contradiction les règles du calcul arithmétique comme si c'était des nombres réels (entiers). L'Algèbre est à ce point devenue l'art de combiner logiquement des symboles vides de sens.

De même, la considération de la limite d'une suite ou d'une fonction peut se ramener à la considération de cette suite ou fonction, en tant qu'elle est convergente; et la convergence se définit indépendamment de l'existence de la limite, à laquelle elle équivaut du reste (v. Remarque de la p. 180.)

Nous concevons l'Algèbre d'une manière différente,
 moins factice et moins vide. Nous attribuons aux
 symboles algébriques une existence hypothétique.
~~Soit~~ Supposons qu'il existe un ensemble d'objets
 pour lesquels on puisse définir l'addition et deux
 sortes de combinaisons ^{qui} possèdent les propriétés
 formelles de l'addition et de la multiplication des
 nombres, et qu'on appellera par suite du même nom;
 supposons en outre que les opérations inverses y soient
 toujours possibles, même l'extraction des racines; supposons
 enfin que cet ensemble (à 2 dimensions) soit continu;
 il existera dans cet ensemble n objets qui vérifieront
 une équation algèbre de degré n indiquera une série de
 combinaisons additives & multiplicatives à effectuer
 sur des objets de l'ensemble, et dont le résultat doit être
 nul (1) Eh bien! il existe dans un tel ensemble n objets
 qui vérifient cette équation, et qui correspondent aux n
~~symboles~~ nombres algébriques, qui les réalisent.
 Seulement il faut bien remarquer que ces objets ne sont
 plus des nombres, mais des grandeurs: cet ensemble est
 le plan cartésien; et qu'il ne s'agit plus d'opérations arith-
 métiques, mais de combinaisons homonymes & homotes
 portant sur des grandeurs. C'est ce qui fait la valeur générale
 et l'utilité de l'Algèbre, conçue comme un formalisme
 abstrait et vide: elle s'applique indifféremment à tout corps
 qui se prête à ses combinaisons formelles. C'est Descartes qui
 a conçu l'Algèbre comme un instrument ^{universel} pour
 porter directement sur les grandeurs; comme une Logique
 une Logistique; ^{mais} ~~comme~~ la Mathématique universelle.
 ce n'est pas un prolongement de l'arithmétique.

(1) L'objet nul est le module de l'addition.

L'idée d'ordre sert de fondement à une science mathématique distincte, que Sylvestre appelait la Tactique, et Cournot la Syntactique. Cette science est indépendante de celle des nombres, mais elle a avec elle des rapports étroits, car on ne peut considérer l'ordre sans tenir compte des objets ordonnés.

La même abstraction qui sert de base à l'idée de nombre sert aussi de base à l'idée d'ordre: c'est l'idée d'unité. Toute idée implique en effet des choses ordonnées; or on fait abstraction de la nature et de la grandeur de ces choses pour ne considérer en chacune que son unité. Chacune vaut ou représente une unité. Or, dès que l'on considère une pluralité d'unités, on a un nombre; mais, inversement, un nombre (multitude d'unités) n'implique aucun ordre entre les unités constitutives. Ainsi l'idée d'ordre implique l'idée de nombre, mais elle est plus complexe, et de sorte que ses propriétés ne résultent pas des propriétés du nombre ou des lois arithmétiques. Elles forment l'objet d'une science à part.

On sait que le nombre ^(cardinal) d'une collection d'objets (d'unités) est indépendant de leur ordre. Cela vient de ce que ces objets sont conçus comme des unités équivalentes et indiscernables. Mais si l'on distingue ces unités, leur ordre n'est plus indifférent: on pourra distinguer plusieurs manières de les ranger, c-à-d. leurs permutations. (Ceci n'est pas exact: le nombre cardinal lui-même suppose que les unités constitutives sont distinctes, sans quoi il se réduirait à un.)

Problème du nombre des permutations de n objets
 (on prend pour exemple des lettres : a, b, c, \dots
 ou encore une même lettre affectée d'indices : a_1, a_2, a_3, \dots
 ce qui revient à opérer sur les nombres eux-mêmes, conçus
 comme ~~nombre ordinaire~~ ^{des numéros}, c'est-à-dire ~~numéros d'ordre~~
 (il ne faut pas croire que, parce qu'on opère sur des nombres,
 on fasse de l'arithmétique.)

Pour 2 objets : $P_2 = 2$. (fait de intuition)

Pour 3 objets : on peut prendre l'un d'eux pour le 1^{er},
 et effectuer sur les autres les permutations possibles : on
 aura ainsi : $P_3 = 3P_2 = 2 \cdot 3$.

Pour 4 objets : on prendra chacun d'eux pour le 1^{er}, et
 l'on effectuera sur les 3 autres toutes les permutations :
 donc : $P_4 = 4P_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4$.

L'raisonnement est général : pour obtenir toutes les
 permutations de $(n+1)$ objets, on prendra chacun d'eux
 pour le 1^{er}, et on lui adjoindra les permutations des n
 autres objets : donc : $P_{n+1} = (n+1)P_n$.

Formule générale : $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ ~~est évident~~
 démontrée par induction complète : elle est vraie pour $n=2$
 (c'est un fait) ; si elle est vraie pour n , elle l'est pour $n+1$
 (en vertu de la formule de récurrence : $P_{n+1} = (n+1)P_n$).
 On représente le produit des n premiers nombres entiers par
 $n!$ (factorielle n)

Arrangements de m lettres n à n ($n < m$):

Tous les assemblages qu'on peut former en écrivant n des m lettres et en les rangeant dans un ordre quelconque; 2 arrangements différents, soit par l'ordre des lettres, soit par la nature des lettres qu'ils contiennent.

Les arrangements 1 à 1 sont les m lettres elles-mêmes:

$$A_m^1 = m$$

Les arrangements 2 à 2 s'obtiennent en écrivant à la suite de chacune d'elles chacune des $(m-1)$ autres:

$$A_m^2 = (m-1) A_m^1 = m(m-1)$$

Les arrangements 3 à 3 s'obtiennent en écrivant à la suite de chacun des arrangements 2 à 2 chacune des $(m-2)$ autres lettres:

$$A_m^3 = (m-2) A_m^2 = m(m-1)(m-2)$$

Le raisonnement est général: les arrangements $(n+1)$ à $(n+1)$ s'obtiendront en écrivant à la suite de chacun des arrangements n à n chacune des $(m-n)$ autres lettres:

$$A_m^{n+1} = (m-n) A_m^n$$

Où la formule générale: $A_m^{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{m-n} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$$

Remarque: $A_m^n = \frac{m(m-1)\dots 3, 2, 1}{(m-n)\dots 3, 2, 1} = \frac{m!}{(m-n)!}$

Autre remarque: Les arrangements de m lettres m à m sont leurs permutations: $A_m^m = P_m = m(m-1)\dots 3, 2, 1 = m!$

(n < m)

Combinaisons de m lettres n à n ; tous les assemblages qu'on peut former en prenant n lettres dans un ordre quelconque. 2 combinaisons ^{différentes} par leur contenu ~~non par leur ordre~~. L'ordre est indifférent.

Il s'ensuit que 2 arrangements de m lettres n à n qui ne diffèrent que par l'ordre correspondent à une seule et même combinaison: ~~ou~~ ^{tous les arrangements} qui contiennent les mêmes n lettres sont la permutation de n lettres, au nombre de $n!$. Donc à chaque combinaison de m lettres n à n correspondent $n!$ arrangements de m lettres n à n . Le nombre des combinaisons est donc égal à celui des arrangements divisé par $n!$:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$C_m^n = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \quad C_m^m = 1 = C_m^0$$

Remarques 1^{re} En vertu de la symétrie de la formule:

$$\frac{m!}{n!(m-n)!}, \quad C_m^n = C_m^{m-n}$$

2^o Le nombre C_m^n étant un nombre entier, il est prouvé que $m(m-1) \dots (m-n+1)$ est divisible par $n!$; autrement dit; que le produit de n nombres entiers consécutifs est divisible par le produit des n premiers nombres entiers (1)

On retrouve ainsi, par la théorie des combinaisons, un théorème d'arithmétique que l'on peut démontrer directement.

(1) et même par le produit de n nombres entiers consécutifs, pourvu qu'ils soient ~~pas~~ inférieurs respectivement aux précédents.

Autre démonstration (due à Cauchy):

Supposons formé le tableau des combinaisons de m lettres n à n , et cherchons 2 expressions du nombre de fois que chaque lettre figure dans ce tableau. Il y a:

$n C_m^n$ lettres en tout; donc la lettre a figure $\frac{n}{m} C_m^n$ fois. D'autre part, si l'on supprime la lettre a dans toutes les combinaisons où elle figure, on obtient toutes les combinaisons de $(m-1)$ lettres $(n-1)$ à $(n-1)$.

Leur nombre est: C_{m-1}^{n-1}

Donc: $\frac{n}{m} C_m^n = C_{m-1}^{n-1}$ $C_m^n = \frac{m}{n} C_{m-1}^{n-1}$

Formule de récurrence jusqu'à: $C_{m-n+1}^1 = m-n+1$.

Cette méthode de démonstration est applicable aux combinaisons complètes (avec répétition) de m lettres n à n .

Soit D_m^n le nombre de ces combinaisons. La lettre a figure dans le tableau: $\frac{n}{m} D_m^n$ fois.

D'autre part, si l'on supprime 1 fois la lettre a dans chacune des combinaisons où elle figure, on obtiendra toutes les combinaisons de m lettres $(n-1)$ à $(n-1)$, dont le nombre est D_m^{n-1} . Dans ces combinaisons, la lettre a figure $\frac{n-1}{m} D_m^{n-1}$ fois; et de plus, on l'a supprimée D_m^{n-1} fois; donc:

$$\frac{n}{m} D_m^n = \frac{n-1}{m} D_m^{n-1} + D_m^{n-1} = \frac{m+n-1}{m} D_m^{n-1}$$

$$D_m^n = \frac{m+n-1}{n} D_m^{n-1}$$

Formule de récurrence: jusqu'à: $D_m^1 = m$.

$$D_m^n = \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1.2.3\dots n} = C_{m+n-1}^n$$

On peut concevoir autrement les arrangements et les combinaisons.

Soient m places données (numérotées de 1 à m) et 2 objets ou lettres a, b à y arranger. On peut mettre a dans chacune des places, puis b dans chacune des $(m-1)$ autres: on aura ainsi: $m(m-1)$ arrangements.

Si l'on a 3 objets à arranger, on ~~pourra~~ prendra chacun des arrangements précédents et l'on placera la 3^e lettre c dans chacune des $(m-2)$ places restantes: le nombre des arrangements est donc: $m(m-1)(m-2)$.

En général, le nombre des arrangements de n objets dans m places ($m > n$) sera: $A_m^n = m(m-1) \dots (m-n+1)$

Si $m = n$, on a des permutations: $P_m = m!$

Si toutes les lettres sont semblables, c'est-à-dire si l'on fait abstraction de leur ordre, le nombre des arrangements distincts deviendra celui des combinaisons de m objets n à n . Et en effet, placer n objets, c'est prendre n places différentes dans l'ensemble des m places, c'est former une combinaison de m objets n à n (sans considérer leur ordre.)

~~Cela revient encore à: faire arranger~~
C'est encore le nombre des arrangements distincts de n lettres A et de $(m-n)$ lettres B (il suffit de remplir les $(m-n)$ places vacantes par des lettres B)

— Le nombre des arrangements avec répétition et de m objets n à n est m^n .

— En somme, l'ordre d'arrangement se ramène à l'ordre plus générale de correspondance: arranger m objets

n à n , c'est en faire correspondre n aux nombres ordinaires 1, 2, 3, ..., n ; arranger n objets dans m places, c'est les faire correspondre à n des m nombres ordinaires 1, 2, 3, ..., m . Les deux arrangements équiviennent à ceci : ~~faire correspondre m objets~~ n des m objets :

a_1, a_2, \dots, a_m

à n autres objets :

b_1, b_2, \dots, b_n

de toutes les manières possibles.

Une permutation consiste à faire correspondre m objets a_1, a_2, \dots, a_m à m autres objets b_1, b_2, \dots, b_m .

de sorte ainsi l'ordre de ordre se ramène à l'ordre de combinaison. Et en effet, la théorie des ~~arrangements~~ ^{permutations} n'implique aucun ordre particulier (spatial ou temporel) entre les objets, mais seulement leur distinction et leur permutabilité. Exemples : n points quelconques de l'espace, et n sphères de rayon différent, n fonctions et n personnes ; n surfaces à colorier et n couleurs, etc.

Application à l'algèbre : Binôme de Newton :

$$(x+a)(x+b)(x+c) \dots (x+l)$$

m binômes, m lettres a, b, c, \dots, l . Le terme le plus élevé est x^m . Le coefficient de x^{m-1} est :

$$S_1 = a + b + c + \dots + l$$

Le coefficient de x^{m-2} est :

$$S_2 = \sum ab = ab + ac + \dots + bc + \dots$$

Celui de x^{m-3} :

$$S_3 = \sum abc = abc + abd + acd + \dots$$

Enfin ~~cette~~ la lettre indépendante x est produite.

$$S_m = abc \dots l.$$

S_1 est la somme des combinaisons 1 à 1,
2 à 2,

S_2

...

m à m

S_m

des m lettres a, b, c, \dots, l .

Soit on suppose $a = b = c = \dots = l$, ~~ou~~ a :

$$C_m^1 a(x+a)^m = x^m \quad S_1 = \frac{m}{1} a,$$

$$C_m^2 a^2 \quad S_2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2,$$

$$C_m^3 a^3 \quad S_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3,$$

$$C_m^n a^n \quad S_n = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} a^n,$$

$$C_m^m a^m \quad S_m = \frac{m!}{m!} a^m = a^m.$$

Forme générale

Il vient:

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \dots + C_m^n a^n x^n + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} x^2 + \frac{m}{1} a^{m-1} x + a^m$$

Le développement est symétrique, en vertu de: $C_m^n = C_m^{m-n}$.
D'ailleurs x et a figurent symétriquement.

Triangle arithmétique de Pascal; arrange les C_m^n
par lignes de m et par rang de n .

0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

La loi de formation du triangle est très simple :
 pour les combinaisons de m lettres n à n , séparons
 celles qui contiennent une lettre, a , et celles qui ne
 la contiennent pas. Le nombre des 1^{es} est C_{m-1}^{n-1} ;
 le nombre des 2^{es} est C_{m-1}^n ; leur nombre total :
 C_m^n . Donc : $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$ (1)

Chaque nombre est la somme de celui qui est placé
 au-dessus et de son voisin de gauche.

On appelle ces nombres : nombre figurés.

On peut donner au tableau une forme rectangulaire :
 En effet : $C_{m+n-1}^n = D_m^n$.

C'est le n^e nombre de la $(m+n-1)^e$ ligne : ou encore le
 m^e nombre de la n^e colonne (car à la n^e colonne
 il manque $(n-1)$ nombres.) Donc, si l'on fait passer
 toutes les colonnes

	1	1	1	1	1	1	...
de la 1 ^{re} ligne, le	1	2	3	4	5	6	...
nombre D_m^n sera	(2) 1	3	6	10	15	21	...
à l'intersection de	(3) 1	4	10	20	35	56	...
la m^e ligne et de	1	5	15	35	70
la n^e colonne	1	6	21	56

La symétrie du
 tableau devient alors manifeste. — La relation :

$$C_{m+n-1}^n = C_{m+n-2}^n + C_{m+n-2}^{n-1} \quad D_m^n = D_{m-1}^n + D_m^{n-1}$$

devient :

Chaque nombre est la somme de ceux qui le précèdent dans sa
 ligne et dans sa colonne.

- (1) On peut vérifier directement cette relation par le calcul.
 (2) Les nombres de la 3^e ligne sont les nombre triangulaires.
 Ceux de la 4^e sont les nombre pyramidaux. (Piles de boulets.)

Par suite: Le n^{e} nombre d'une ligne quelconque est la somme des n premiers nombres de la suite précédente.

Et symétriquement: Le m^{e} nombre d'une colonne quelconque est la somme des m premiers nombres de la colonne précédente.

Le binôme de Newton n'est pas un théorème de l'algèbre: ~~mais~~ mais une proposition de la théorie des combinaisons. La preuve n'est qu'il n'implique aucune propriété spéciale de la multiplication; il repose sur une loi ~~combinatoire~~ purement formelle: loi distributive de la multiplication par rapport à l'addition:

$$(x+a)(x+a) = x^2 + ax + ax + a^2.$$

On s'en applique à toutes les opérations qui sont distributives par rapport à une combinaison donnée.

Exemple: $d(uv) = u dv + v du$

$$d^2(uv) = u d^2v + du dv + dv du + v d^2u.$$

Général: $d^m(uv) = C_m^0 u d^m v + C_m^1 du d^{m-1} v + \dots + C_m^{m-1} du^{m-1} dv + C_m^m v d^m u$

Formule symbolique:

$(du + dv)^m$ en convenant que $d^2u = 0$

Autre exemple: $f(x, y) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

$$d^m f = C_m^0 \frac{\partial^m f}{\partial x^m} dx^m + C_m^1 \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y} dx^{m-1} dy + \dots + C_m^{m-1} \frac{\partial^m f}{\partial x \partial y^{m-1}} dx dy^{m-1} + C_m^m \frac{\partial^m f}{\partial y^m} dy^m$$

Formule symbolique:

en convenant que: $\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^m$ où $\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^m f$

Ces formules reposent sur une seule et même loi combinatoire étrangère et supérieure à l'algèbre et à l'analyse.

14^e Leçon

Théorie des substitutions. Étant données n lettres, il y en a $n! = 1.2.3 \dots n$ permutations.

On appelle substitution l'opération par laquelle on passe d'une permutation à une autre (en remplaçant chaque lettre de la 1^{re} par la lettre qui occupe le même rang dans la 2^e).

Il y a $n!$ substitutions possibles de n lettres, en y comprenant la substitution identique, qui consiste à conserver la même permutation.

On peut obtenir les $n!$ permutations possibles en appliquant à une permutation quelconque les $n!$ substitutions. ⁽¹⁾

On appelle produit de 2 substitutions A, B le ~~résultat~~ ^{qui donne le même résultat} qu'on obtient en effectuant les substitutions A et B successivement dans leur ordre sur une même permutation.

On définit ainsi une opération, dite multiplication, mais qui n'est pas commutative; le produit dépend en général de l'ordre des facteurs. (de 2 substitutions)

Notation: la même que pour la multiplication; mais on distingue multiplication à droite et à gauche.

Le module de la multiplication est la substitution identique; on la représente par 1.

Puissance d'une substitution: répétition d'une même substitution. — Par convention, $S^0 = 1$.

Substitutions inverses: Si S passe de P_1 à P_2 le passage (la permutation)

(1) N. B.: Cela n'est vrai que parce que l'ensemble des $n!$ substitutions forme un groupe. Car si S_1 est la subst. de P_1 à P_0 , S_2 celle de P_2 à P_0 , la subst. de P_1 à P_2 sera $S_2 : S_1$, c'est une subst. du groupe partant de P_0 .
ou $S_2 \times S_1^{-1}$.

inverse de P à P , est la substitution S^{-1} . En effet,

$$S S^{-1} = 1$$

$$S^{-1} = \frac{1}{S}.$$

La suite des puissances d'une substitution est périodique, car il n'y a qu'un nombre fini ($n!$) de substitutions possibles de n lettres. Si la période se compose de m substitutions distinctes,

$$S^m = 1 = S^0 = 1$$

on revient à la permutation initiale. On dit que la substitution est d'ordre m . Analogie avec Théorie des

Substitution circulaire. Étant données n lettres en ordre linéaire, une subst. circulaire consiste à remplacer chacune par la suivante (et la dernière par la 1^{re}).

~~Principe~~ Image: un cercle tournant de $\frac{1}{n}$ de circonf.

Puissances d'une substitution circulaire: consistent à remplacer chaque lettre par la 2^e, la 3^e, ... la $(n-1)^e$ consecutive (en recommençant à compter au commencement).

On encor: ordre périodique illimité, consistant à répéter une même permutation un nombre indéfini de fois, à la suite de elle-même: $abcde abcde abcde \dots$

La n^e puissance d'une subst. circulaire est $= 1$.

Donc l'ordre d'une subst. circulaire est égal au nombre des lettres qu'elle se permute.

Théorème: Toute substitution non circulaire est un produit de subst. circulaires portant sur des lettres différentes.

Donc: décomposition d'une substitution en facteurs circulaires ou cycles.

Une subst. circulaire de n lettres équivaut à $(n-1)$ inversions (transpositions de 2 lettres consécutives).

(1) Ne pas confondre avec l'exemple de Cournot (Correspondance) où l'on effectue m substitutions en prenant des lettres de n en n dans une succession de périodes de m lettres ($n < m$).

Une substitution quelconque est égale à un produit de inversions, dont le nombre est déterminé à un multiple de 2 ^{précis} (= de même parité.)

Les substitutions du 1^{er} genre équivalent à un nombre pair de inversions; du 2^e genre à un nombre impair.

Application au jeu des quinze: la substitution est possible si elle est du 1^{er} genre; impossible si elle est du 2^e.

— Le produit de plusieurs substitutions est pair ou impair, suivant que le nombre des substitutions impaires est pair ou impair. (Analogie avec la règle des signes en algèbre.) [De même qu'une somme de plusieurs nombres est paire ou impaire, suivant qu'elle contient un nombre pair ou impair.]

Théorie des groupes de substitutions. [de nombres impairs.]

On appelle groupe fini un ensemble d'objets, en nombre fini, sur lesquels on peut effectuer une combinaison jouissant des propriétés suivantes:

1^o La combinaison de 2 objets produit un autre objet bien déterminé de l'ensemble.

2^o La combinaison est associative;

3^o Un même objet combiné avec deux objets différents donne des résultats différents.

On voit qu'un ^{de} ~~un~~ ^{ensemble} de substitutions forme un groupe, pourvu que le produit de 2 subst. de l'ensemble soit encore un subst. de l'ensemble. D'ordre du groupe est le nombre des substitutions.

Exemples. 1^o L'ensemble des $n!$ substitutions possibles de n lettres forme un groupe (d'ordre $n!$)

2^o Les puissances d'un même substitution circulaire forment un groupe (d'ordre n .)

Si toutes les substitutions d'un groupe H font partie d'un groupe G , le groupe H est dit sous-groupe de G : et son ordre est un diviseur de l'ordre de G .

Corollaire : L'ordre d'un groupe quel que de n lettres est un diviseur de $n!$: car il fait partie du groupe des $n!$ substitutions possibles, au nombre de $n!$.

On appelle indice d'un groupe le quotient de $n!$ par l'ordre de ce groupe.

Groupe symétrique : groupe des $n!$ substitutions possibles.

Groupe alterné : groupe des $\frac{n!}{2}$ substitutions paires.

Théorème de M. Bertrand. L'indice d'un groupe de n lettres ne peut être à la fois supérieur à 2 et inférieur à n , si $n \geq 4$ (démontré par Serret).
So l'indice d'un groupe est égal à n , ce groupe se compose des $(n-1)!$ substitutions de $(n-1)$ lettres (sauf dans le cas où $n = 6$.)

Car il existe un groupe d'indice 6 qui comprend 120 substitutions de 6 lettres, mais qui n'est pas formé par les 120 substitutions de 5 lettres (groupe d'icosaèdre) (1)

Tout groupe d'ordre premier p se compose des p puissances d'une substitution circulaire d'ordre p .

Une substitution d'ordre premier p ne contient que des cycles de p lettres : car l'ordre d'une substitution qui contient des cycles de h, k, l, \dots lettres est le ppcm des nombres h, k, l, \dots

(1) Le groupe d'icosaèdre n'est le groupe alterné de 5 lettres; son ordre est donc : $\frac{1.2.3.4.5}{2} = 60$. C'est le groupe non cyclique le plus simple.

On appelle groupe cyclique un groupe formé par les puissances d'une substitution circulaire, ou un produit de plusieurs groupes de cette espèce.

Un groupe cyclique d'ordre non premier n est le produit de groupes cycliques ayant pour ordres respectifs les facteurs premiers de n .

Un groupe est dit soluble quand il est le produit de groupes cycliques : parce que l'équation algébrique correspondante est alors soluble.

— En quoi consiste la correspondance entre les groupes et les équations ? ou les fonctions algébriques ?

Lorsqu'une fonction de n ~~variables~~^{lettres} x_1, x_2, \dots, x_n reste invariable pour toutes les substitutions d'un groupe G , elle est un invariant de ce groupe : caractéristique, si elle varie pour toute autre substitution des n lettres.

Exemples : les fonctions symétriques d'un certain nombre de lettres S_1, S_2, \dots, S_n sont des invariants du groupe symétrique d'ordre n !

La fonction : $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_{n-1} - x_n)$ est un invariant caractéristique du groupe alterné : en effet, elle change de signe à chaque inversion de 2 lettres ; donc elle reste invariable par les substitutions paires.

Théorèmes : Toute fonction de n lettres est un invariant caractéristique d'un groupe de substit. de ces lettres.

Réciproquement, tout groupe de substitutions possède des invariants caractéristiques, et l'on peut en former une infinité.

Représentation analytique des substitutions.

Si l'on fait porter les substitutions sur les indices $1, 2, 3, \dots, n$,
~~chaque~~^{une} substitution fera correspondre à chacun de ces nombres
un autre nombre, c'est-à-dire définira une fonction de ces nombres.
Exemple: Une substitution circulaire sera représentée par:

$$f(x) = x + 1$$

La 2^e puissance, par:

$$f(x) = x + 2,$$

La k ^e puissance, par:

$$f(x) = x + k,$$

La $(n-1)$ ^e puissance, par:

$$f(x) = x + n - 1$$

Seulement, comme les indices ~~résultants~~ ne doivent pas
dépasser n , on devra retrancher n au résultat, chaque
fois qu'il dépassera n ; ce qui revient à prendre un
nombre congru $[mod. n]$ au nombre indiqué. ^{de n pour}
D'une manière générale, une fonction quelconque ~~de n~~
premiers nombres entiers pourra représenter une substitution,
pourvu qu'on la ramène ~~à~~ dans les n premiers entiers
^{par la division} par n : cela revient à considérer comme
égaux les nombres congrus $[mod. n]$.

Relation entre la théorie des nombres et celle de l'ordre.
Les congruences $[mod. n]$ ont pour effet de réduire la
suite ~~naturelle~~^{infinie} des nombres entiers à une suite
périodique: $1, 2, 3, \dots, n, 1, 2, 3, \dots, n, 1, 2, 3, \dots$
et par conséquent, de transformer un ordre linéaire
en un ordre circulaire fermé. (carde p premier)

— Cas particulier: Une substitution linéaire est représentée
par $x \mapsto ax + b$, en prenant $ax + b [mod. p]$
c'est-à-dire en réduisant $ax + b$ à ~~sa~~ reste de la division par p .

Cela posé, Galois a ~~démontré~~ trouvé les théorèmes:
 Un groupe ^{de degré premier} qui ne contient que des substitutions
 linéaires est résoluble (décomposable en produit
 de groupes cycliques)

Et réciproquement, un groupe résoluble ne
 renferme que des substitutions linéaires.

+ Maintenant, comme une équation ~~irréductible~~
 de degré premier est résoluble, si son groupe l'est:
 La condition pour qu'une équation irréductible de
 degré premier soit résoluble, il faut et il suffit
 que son groupe ne contienne que des substitutions
 linéaires. (dans ce cas, toutes les racines sont exprimables en fonction
 rationnelle de deux quelconques d'entre elles.)
 En somme, le groupe d'une équation spéciale (à d. à
 coefficients numériques) représente le degré de symétrie
 qu'offrent ses racines.

Le groupe de l'équation générale (à coeff. littéraires)
 est le groupe symétrique: car rien n'y distingue les
 racines, les coefficients étant des fonctions symétriques
 des racines.

On démontre que l'équation générale de degré > 4
 n'est pas résoluble (parce que le groupe symétrique n'est
 pas résoluble pour $n > 4$).

Le problème général de la résolution des équations
 revient à leur réduction à des équations normales qui

+ On appelle groupe d'une équation le groupe qui
 laisse invariables les relations rationnelles entre
 les racines de cette équation. Il est déterminé par
 le résolvant de l'équation.

~~détournement de l'irrationalité caractéristique~~
se ramène en somme à la réduction de leurs groupes. La
question de la résolubilité par radicaux n'est plus qu'une
cas particulier: celui de l'équation se ramène à des
équations binômes, et son groupe à des groupes cycliques.

Ainsi le parallélisme est complet entre le problème de la
résolubilité ^{des équations} des radicaux et celui de la réduction des
groupes correspondants. Cette réduction s'obtient en
adjoignant à l'équation une quantité définie par
une équation auxiliaire (ce d'en étendant le
domaine de rationalité, ~~de manière à~~ ^{ou l'on doit} trouver les
racines, de telle sorte que le polynôme auparavant
irréductible devienne réductible [la réductibilité étant
définie par rapport à un domaine de rationalité donné].

Cette relation de la Théorie de l'Ordre avec l'Algèbre se
comprend bien dans la théorie formaliste (voir Drach).
En effet, si les racines ne sont définies que par l'équation
même qu'elles sont censées vérifier, elles sont indiscernables
en raison du degré de symétrie de l'équation elle-même,
et la résolution de cette équation consistera à diminuer
progressivement cette indétermination en réduisant le
groupe de l'équation par l'adjonction de quantités auxi-
liaires (en partic. des radicaux.) Voir dans Galois comment
la résolution de l'équation du 2^e degré se traduit par
à pas par la réduction de son groupe, chaque extraction
de racine ramène divisant l'ordre du groupe par 2; de racine
cubique, par 3 — (Euons, p. 45.) Résoudre une équation
c'est réduire son groupe à la substitution identité (p. 46).

(1) Cf. Klein, Conférence IX. (2) V. Galois, p. 34-35.

La théorie de l'ordre et des combinaisons se rattache à la théorie des probabilités: en effet, les probabilités divinement complexes se ~~calculent~~ ^{calculent en ramenant ces} à des combinaisons d'événements simples dont on ^{événements} connaît les probabilités.

Les probabilités simples sont connues, non par le calcul, mais par la simple énumération des chances. C'est donc une question dearithmétique élémentaire.

On appelle chances divers événements ou cas qui peuvent se présenter indifféremment: on suppose qu'il n'en peut arriver qu'un ^(à la fois) et que tous sont également possibles. — L'égalité des chances, et leur mutuelle exclusion, sont les 2 hypothèses fondamentales de la théorie du hasard. +

Remarque: Le hasard ou la chance n'implique nullement l'absence de cause, mais simplement l'ignorance des causes, ou l'indifférence (symétrie) des causes.

Exemple: les 6 faces d'un cube symétrique.

Parmi les chances possibles, on en distingue qui sont favorables à tel événement attendu (parié, par ex.)

Définition de la probabilité: La probabilité de cet événement est le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles.

La probabilité est donc essentiellement une fraction comprise entre 0 et 1. Si tous les cas sont favorables,

+ Les chances constituent donc les éléments simples, les unités primordiales de la théorie des probabilités.

La probabilité est 1: c'est la certainitude.

La probabilité étant un rapport, quand le nombre des cas est très grand, on a intérêt à calculer le rapport sans calculer les nombres qui en sont les termes: les procédés techniques pour atteindre ce but constituent les principales méthodes du Calcul des probabilités. Ainsi se pose le problème de l'évaluation approximative de formules pour les cas des grands nombres (par ex. de la factorielle $n!$ pour n très grand), problème d'Arithmétique pur, qui met en jeu néanmoins toutes les ressources du Calcul intégral, parce qu'il y a ^{arrivé} à substituer une sommation continue à une sommation d'éléments discontinus très nombreux, par approximation.

I. Si un événement dépend de divers cas inégalement probables, la probabilité totale est la somme des probabilités des cas favorables à l'événement (On suppose que dans chaque cas favorable l'événement arrive nécessairement).

En effet, soient $\frac{n_1}{N}$, $\frac{n_2}{N}$, $\frac{n_3}{N}$ les probabilités des cas favorables (ou causes de l'événement). Cela signifie que sur N cas possibles en tout, il y en a n_1 favorables à la 1^{re} cause, n_2 à la 2^e, n_3 à la 3^e. Comme ces 3 causes entraînent nécessairement l'événement désiré, le nombre des cas favorables à celui-ci est: $n_1 + n_2 + n_3$, et sa probabilité:

$$\frac{n_1 + n_2 + n_3}{N} = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \frac{n_3}{N}.$$

Remarque. On appelle cause toute hypothèse favorable à l'événement désiré; ~~c'est~~ c'est une circonstance ^{une condition ou} antécédent nécessaire à l'arrivée de cet événement. Exemple: une urne contenant n_1 boules blanches, n_2 rouges, n_3 noires, etc. et $N > n_1 + n_2 + n_3$. On gagne si l'on tire une boule blanche, rouge ou noire. Le tirage d'une boule est une cause de gain.

Probabilité composée. On appelle événement composé un événement qui consiste dans la réunion (jointure) de plusieurs événements (simultanés ou successifs) indépendants les uns des autres.

Lemme: Si l'on combine m objets à n objets, chacun à chacun, le nombre des combinaisons est mn .

Remarque Cela permet de démontrer la loi commutative de la multiplication des nombres entiers (Cournot)

II. Soient K événements simples indépendants; le nombre de tous les cas possibles N est le produit $m_1 m_2 \dots m_K$ des nombres des cas possibles pour chaque événement. De même, le nombre des cas favorables est le produit $n_1 n_2 \dots n_K$ des nombres des cas favorables. La probabilité de l'événement composé est donc:

$$\frac{n_1 n_2 \dots n_K}{m_1 m_2 \dots m_K} = \frac{n_1}{m_1} \times \frac{n_2}{m_2} \times \dots \times \frac{n_K}{m_K} \quad (\text{cf. d.})$$

Exemple: K urnes contenant resp. $m_1 m_2 \dots m_K$ boules, et $n_1 n_2 \dots n_K$ boules blanches.

Quelle est la probabilité de tirer K boules blanches?

Probabilité relative. Si parmi les N cas possibles on distingue m cas spéciaux, parmi lesquels se trouvent n cas favorables à l'événement, la probabilité relative de l'événement est le rapport $\frac{n}{m}$.

Les m cas considérés constituent une cause probable de l'événement; la probabilité de cette cause est $\frac{m}{N}$, et la probabilité de l'événement relative à cette cause est $\frac{n}{m}$. (Exemple des boules blanches, rouges et noires: la probabilité de gagner avec une boule blanche est $\frac{n_1}{m_1 + m_2 + m_3}$ plutôt qu'avec une autre)



On peut dire que la probabilité relative à une cause est la probabilité absolue de l'événement quand on sait que la cause est arrivée.

III. Quand deux événements dépendent l'un de l'autre, la probabilité absolue de l'événement composé des deux est le produit de la probabilité absolue du 1^{er} par la probabilité du 2^e relative au 1^{er}.

En effet, le 1^{er} est cause du 2^e; donc la probabilité de l'événement composé est la probabilité du 2^e événement

$$\frac{n}{N} = \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{N} \quad (\text{et})$$

Exemple: probabilité de gagner avec une boule blanche:

$$\frac{n_1}{N} = \frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3} \times \frac{n_1 + n_2 + n_3}{N}$$

Remarque. Il n'est pas besoin que les 2 événements soient successifs ni même séparables réellement; il suffit que le 1^{er} soit indépendant du 2^e, et que le 2^e dépende du 1^{er}.

IV. Si un événement peut dépendre de plusieurs causes (ou hypothèses) qui s'excluent mutuellement, sa probabilité est la somme des probabilités composées correspondant à chaque cause ou hypothèse.

Cela résulte du 1^{er} et du 3^e principes. Soient m_1, m_2, m_3 les nombres de cas favorables resp. aux 3 causes possibles; n_1, n_2, n_3 les nombres de cas favorables à l'événement dans chacune des 3 hypothèses ($n_1 < m_1, n_2 < m_2, n_3 < m_3$). La probabilité de l'événement est:

$$\frac{n_1 + n_2 + n_3}{N} = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \frac{n_3}{N} = \frac{n_1}{m_1} \cdot \frac{m_1}{N} + \frac{n_2}{m_2} \cdot \frac{m_2}{N} + \frac{n_3}{m_3} \cdot \frac{m_3}{N}$$

ou encore: $P = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$.

p_1, p_2, p_3 probabilités des causes; q_1, q_2, q_3 prob. relatives à chaque

Théorèmes inverses de III et de IV:

V. Si l'on connaît d'avance la probabilité ^{absolue} de l'événement composé et celle du 1^{er} événement (qu'on suppose déjà arrivé) le quotient de la 1^{re} par la 2^e sera la probabilité du 2^e événement (encore attendu.)

VI. Si un événement ^E arrivé peut avoir plusieurs causes, la probabilité de l'existence d'une de ces causes est le quotient de la probabilité relative à cette cause par la somme des probabilités relatives à toutes les causes.

Il est entendu que si la probabilité ^{a priori} des diverses causes est inégale, on doit multiplier la probabilité relative à chaque cause par la probabilité propre de cette cause.

Considérons l'événement composé; savoir, que l'événement ^E est arrivé; et qu'il est dû à la cause C_i (C_1, C_2, \dots, C_k)

On peut évaluer sa probabilité de deux manières:

- 1^o Il faut que la cause C_i ait agi (probabilité p_i) et qu'elle ait produit l'événement E_i (probabilité q_i)
- 2^o Il faut que l'événement E_i soit arrivé (probabilité: $p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_k q_k$) et qu'il soit dû à la cause C_i (probabilité inconnue x_i). Egalons ces 2 formes de même probabilité:

$$p_i q_i = (p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_k q_k) x_i$$

d'où :

$$x_i = \frac{p_i q_i}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_k q_k}$$

On peut dire simplement:

Le nombre de tous les cas favorables à l'événement E_i est $N(p_1 q_1 + \dots + p_k q_k)$; celui des cas favorables à l'hypothèse

que la cause C_i a ^{produit} $N p_i q_i$. Donc, etc.
 Exemple: Une urne contient N boules blanches et noires, numérotées 1, 2, 3, ... k . On tire une boule blanche; quelle est la probabilité qu'elle soit numérotée i ?
 Soient m_i le nombre des boules numérotées i , et n_i le nombre des blanches du même numéro. Le nombre total des boules blanches est: $n_1 + n_2 + \dots + n_k$
 et la probabilité demandée est: $\frac{n_i}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \pi_i$
 Or: $\frac{n_i}{m_i} = p_i$, $\frac{m_i}{N} = q_i$:

$$n_i = m_i p_i = N p_i q_i \quad ; \quad \pi_i = \frac{p_i q_i}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_k q_k}$$

Les théorèmes I et III servent de principes à la recherche de la probabilité des causes, qui constitue le problème inverse des probabilités: Etant données toutes causes, déduire de leur probabilités la probabilité de tel effet. Etant donné un effet, déduire la probabilité de telle cause. Le problème inverse est (comme toujours) beaucoup plus difficile que le problème direct.

— Espérance mathématique. Si l'on évalue l'avantage que l'on ~~s'attend~~ attend d'une épreuve aléatoire, on appelle espérance math. le produit de cette valeur par la probabilité de l'obtenir. Il ne faut pas (malgré l'égalité arithmétique) l'assimiler à la certitude d'une ^{valeur} ~~certitude~~ égale.

Si n joueurs ont chances égales de gagner la somme S , et s'ils préfèrent se la partager que de courir les risques de jeu, ils devront en recevoir chacun $\frac{1}{n}$: soit $\frac{S}{n} = S_p$.

Tel est le sens de leur espérance mathématique. C'est la valeur des chances de gain qu'on a, si l'on veut liquider la part.
 (Origine historique du calcul des probabilités: règle des parts)

(de hasard)

Pour qu'un jeu soit équitable, il faut que les joueurs aient chances égales, c'est-à-dire leurs espérances math.

Soient égales. Si le joueur A a la probabilité p de gagner le jeu b de l'adversaire, et si B a la prob. q de gagner le jeu a , leurs espérances seront égales si :

$$pb = qa.$$

C'est la règle des paris : la mise doit être en raison inverse de la probabilité de gagner.

Si l'on attend divers avantages de plusieurs événements indépendants, l'espérance math. est la somme des produits de la probabilité de chaque événement par l'avantage qui doit en résulter.

Si de certains événements on espère un gain, et de certains autres une perte, ceux-ci devront être comptés négativement dans l'espérance math.; et si la somme est négative, elle représentera une crainte mathématique (c'est-à-dire une probabilité de perte) totale.

Dans un jeu équitable, l'espérance de chaque joueur est nulle :

$$pb - qa = 0.$$

Dans une loterie, l'espérance est toujours négative : car si il y a 1 million de billets, et si le gros lot est de 100.000 fr. on a 1 chance sur 1.000.000 de gagner 100.000 fr. l'espérance est donc :

$$\frac{100.000}{1.000.000} = \frac{1}{10} \text{ de franc}$$

Le billet vaut 10 centimes.

Dans tous les jeux de hasard, le banquier se réserve une chance qui rend le jeu inégal, et défavorable aux joueurs. Comme la banque est toujours sûre de gagner, l'espérance math. des joueurs est nécessairement négative.

Paradone de Saint-Petersbourg. Deux joueurs, A et B, jouent à pile ou face. A donne à B 2 fr. s'il amène face au 1^{er} coup; 4 fr. s'il amène face au 2^e coup seulement; 8 fr. si au 3^e, etc. 2ⁿ au n^e. Quelle est l'espérance math de B? La probabilité d'amener face au 1^{er}, au 2^e, ... au n^e coup seulement est: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$.

Le gain correspondant est: 2, 4, 8, ..., 2ⁿ francs.

L'espérance est $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ francs cad. un nombre infini. Pour que le jeu soit égal, et faut qu'il B risque une somme infinie; en gén. il faut qu'il risque n francs pour n coups.

Pour résoudre cette difficulté, Daniel Bernoulli a inventé l'espérance morale.

Il faut d'abord définir l'avantage moral: on admet que l'avantage moral qui résulte d'un gain est en raison inverse de la fortune qu'on possède. D'où cette définition:

La valeur relative d'une somme infiniment petite est le rapport de sa valeur absolue à la fortune de la personne qui la gagne ou la perd.

De cette définition résulte l'évaluation de l'avantage moral et de la fortune morale.

L'espérance morale est le produit de l'avantage moral par la probabilité qu'on a de le obtenir.

Il en résulte que, même à jeu égal, la perte est relativement plus grande que le gain. Si un joueur qui possède 100 en risque 50 à pile ou face, sa fortune risque de diminuer le rapport de 2 à 1, et d'augmenter dans le rapport de 2 à 1.

Le calcul montre que la fortune morale se réduit à 87^a .
 En général, tous les risques diminuent la fortune morale.
 Il vaut mieux exposer sa fortune par parties à des risques
 indépendants, que de l'exposer tout entière à un seul risque.
 Plus on divise ainsi sa fortune entre divers risques,
 plus l'avantage moral s'approche de l'avantage
 math, il coïncide avec lui. Lorsque la division est
 supposée infinie.

— Application au paradoxe de St Pétersbourg.

Si B ne veut pas diminuer sa fortune morale, et si
 sa fortune physique est de $107,89$, il ne devra risquer
 que $7,89$; si elle est de $208,78$, il risquera $8,78$.

Inversement, la fortune morale peut s'accroître par
 les assurances: l'assuré peut trouver un avantage
 moral dans un contrat où l'assureur trouve en
 même temps son bénéfice (avantage mathématique).

A plus forte raison les assurances mutuelles augmen-
 tent la fortune morale des participants.

En résumé, il y a un désavantage moral attaché
 au risque ou à l'incertitude. La fortune morale
~~diminue~~ décroît quand on augmente les risques, et
 s'accroît quand on les diminue.

De la répétition des événements.

Un événement répété est un événement composé: on lui
 appliquera la règle générale.

Considérons d'abord m urnes, contenant respectivement
 a, a, \dots, a boules blanches, et b, b, \dots, b boules noires.
 On tire une boule de chaque urne; quelle est la probabilité

de tirer n boules blanches (et $m-n$ boules noires) ?
 Le nombre des cas possibles pour chaque urne est $(a+b)$;
 celui de tous les cas possibles résultant de leurs combinaisons
 est $(a_1+b_1)(a_2+b_2) \dots (a_m+b_m)$.

Le nombre des cas favorables est celui des combinaisons
 qui contiennent n boules blanches et $m-n$ noires.
 C'est donc, dans le produit précédent, la somme des termes
 qui contiennent n facteurs a et $(m-n)$ facteurs b .
 On sait que le nombre de ces termes est: $\frac{m!}{n!(m-n)!}$.

Supposons maintenant que toutes les urnes ont la même
 composition: $a_1 = a_2 = \dots = a_m = a$,
 $b_1 = b_2 = \dots = b_m = b$.

Le nombre des cas possibles devient: $(a+b)^m$.

Celui des cas favorables: $\frac{m!}{n!(m-n)!} a^n b^{m-n}$.

La probabilité demandée
 est donc le quotient: $P = \frac{m!}{n!(m-n)!} \left(\frac{a}{a+b}\right)^n \left(\frac{b}{a+b}\right)^{m-n}$.

Or: $\frac{a}{a+b} = p$ probabilité de tirage d'une boule blanche
 $\frac{b}{a+b} = q$ probabilité de tirage d'une boule noire

Donc: $P = \frac{m!}{n!(m-n)!} p^n q^{m-n}$

~~(n+1)ème~~ terme général du développement du binôme: $(p+q)^m =$

On vérifie ainsi que la somme des probabilités de tous les cas possibles est = 1.

Au lieu de m urnes de même composition dans lesquelles
 on tire respectivement et simultanément m boules, on peut
 considérer une seule urne dans laquelle on fait m tirages
 successifs, en remettant chaque fois la boule sortie (ou
 en agitant pour la mêler). P est donc la probabilité qu'il
 y a d'amener n fois un boulet blanc en m tirages.

Quelle est la plus probable ?

la combinaison de tirages

Le rapport du terme général : $\frac{m!}{n!(m-n)!} p^n q^{m-n}$
au terme précédent : $\frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!} p^{n-1} q^{m-n+1}$

$$\text{est : } \frac{m-n+1}{n} \times \frac{q p}{p q} = \frac{(m-n+1) p}{n(1-p)}$$

Cherchons s'il est plus supérieur ou inférieur à 1.

$$(m-n+1) p > n(1-p) \quad mp - np + p > n - np$$

$$(m+1) p > n$$

Autant que n est plus ^{petit} grand que $(m+1)p$, le terme général croît ; quand n est plus grand que $(m+1)p$, il décroît. Le maximum est donc atteint quand

$$n = (m+1)p$$

ou, si $(m+1)p$ n'est pas un nombre entier, pour la ~~plus~~ ^{grande} valeur de n la plus est égal au plus grand entier contenu dans $(m+1)p$: car alors :

$$n < (m+1)p < n+1$$

ce qui montre que le terme correspondant est à la fois plus grand que le précédent et que le suivant.

Si pm est entier, c'est le plus grand entier contenu dans $(m+1)p$; alors : $n = pm$, $m-n = m(1-p) = qm$.

On voit que le cas la plus probable correspond au cas où :

$$\frac{n}{m-n} = \frac{p}{q}$$

cà-d. où les nombres de boules tirées sont proportionnels aux probabilités des tirages, c'à-d. aux nombres des boules contenues dans l'urne. — Cette conclusion s'applique au cas de 2 événements A et B, exclusifs l'un de l'autre et contradictoires, de telle sorte que l'un d'eux arrive

nécessairement à chaque épreuve aléatoire; leurs probabilités respectives étant p et q . $(p+q)=1$

Ainsi la formule du binôme représente la loi de probabilité des diverses répartitions possibles; parce qu'elle est la loi générale des combinaisons de m objets n à n , et que la fréquence et la probabilité de chaque répartition est proportionnelle au nombre des combinaisons correspondantes.

Représentation graphique: On divise une droite en m segments en $(m+1)$ points de division on élève des perp. prop. aux triangles correspondants du développement du binôme $(p+q)^m$. Quand m est très grand, on peut relier les sommets de ces per. par une courbe continue. Analytiquement, cette courbe fictive se traduit par une certaine fonction qui exprime l'ordonnée par rapport à l'abscisse (e^{-t^2})

L'aire comprise entre 2 ordonnées représente la probabilité d'un événement compris entre les 2 abscisses correspondantes. On appelle écart la différence entre la valeur considérée et la valeur qui correspond au maximum.

La valeur la plus probable est évidemment cette valeur maximum; néanmoins, si m croît indéfiniment, la prob. de toutes les répartitions possibles augmente, et par suite la probabilité chacune d'elles décroît indéfiniment, d'autant plus vite que l'écart est plus grand. De sorte que la probabilité d'un écart nul tend vers zéro. De plus, la probabilité d'un écart absolu devient de plus en plus grande. (1)

En revanche, la probabilité qu'un écart relatif reste inférieur à une limite donnée devient aussi de plus en plus grande, c'est-à-dire que le rapport du nombre des événements ^{écarts} au nombre total des épreuves contenues dans certaines limites tend vers 1.

(1) D'où l'on conclut la ruine inévitable des joueurs: en effet, la fortune de chacun d'eux constitue une limite supérieure de l'écart, et la probabilité qu'elle sera dépassée croît de plus en plus.

Les paradoxes s'expliquent par la loi de croissance de l'écart moyen et de l'écart probable.

L'écart moyen est la moyenne de tous les écarts, pris en valeur absolue.

L'écart probable est l'écart tel qu'il y ait autant de chances pour le dépasser que pour rester au dessous. C'est pas l'écart le plus probable, qui est l'écart 0; c'est l'écart dont l'ordonnée partage en deux ^{parties} égales la moitié de l'aire de la courbe figurative, prise d'un côté de l'ordonnée maxima. Il serait mieux appelé l'écart médian. (Cournot.)

Ces deux écarts, dont le rapport est constant, et qui caractérisent la vitesse avec laquelle décroît la probabilité des écarts, sont proportionnels à \sqrt{m} . Ils croissent donc indéfiniment avec le nombre des épreuves, mais leur rapport à ce même nombre décroît indéfiniment (étant proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{m}}$.)

— On voit qu'il y a avantage à introduire dans la variation des probabilités une continuité fictive, alors qu'elles correspondent à des événements discontinus, mais très nombreux (1). A plus forte raison quand les probabilités sont susceptibles de variation continue, comme celles des événements d'ordre géométrique. Exemple: jeu du franc-carreau. On jette au hasard une pièce de monnaie, de rayon $\frac{r}{2}$, sur un plan divisé en carrés de côté a . On gagne si la pièce tombe à l'intérieur d'un carré, on perd si elle touche ou coupe un des côtés.

(1) Les nombres dont le rapport constitue la probabilité peuvent devenir infinis, pourvu que leur rapport reste fini et déterminé.

Quelle est la probabilité qu'on a de gagner ?
 Tous les carrés étant ^{pareils} ~~égaux~~, on peut bien
 considérer qu'un wagon a l'intérieur un carré
 à la distance $\frac{a}{2}$ de tous les côtés. On gagne si le
 centre de la pièce tombe dans ce carré; on perd s'il tombe dans
 la bande comprise entre les 2 carrés. On admet que le centre
 de la pièce tombe dans une aire ^{la probabilité qu'il} proportionnelle
 à cette aire. La probabilité de gagner est donc ici: $\frac{(a-2r)^2}{a^2}$



On voit que la probabilité ne peut plus se définir comme
 un rapport de nombre (nombre de points d'une aire:
 absurde) mais comme un rapport de grandeurs: c'est
 le rapport de l'étendue des chances favorables à l'étendue
 totale des chances (Cournot) Citer le § 15:

« C'est ainsi que le calcul de la probabilité mathématique
 qui ne se présentait d'abord que comme une branche de la
 syntaxique ou de la théorie des combinaisons, devient
 plus vaste que la syntaxique même, en ce sens qu'il
 s'applique à des cas où il n'y aurait lieu, ni de former
 les combinaisons une à une, ni d'en calculer le nombre,
 parce que ce nombre est infini. »

Le Calcul des probabilités est instructif, parce qu'il montre
 à quelles conditions une science peut être mathématique.
 Pour la probabilité, en tant que sentiment interne ou croyance,
 c'est un phénomène psychique, subjectif, qui échappe à toute mesure.
 Mais on en définit (arbitrairement) l'équivalent mathématique
 et on définit les combinaisons des probabilités de telle sorte
 qu'elles s'expriment par des opérations arithmétiques. Comme on
 voit, c'est ainsi qu'elles deviennent objet de science et de calcul.

16^e leçon

Science des grandeurs. Qu'est-ce qu'une grandeur ?

Définition classique: Toute chose susceptible d'augmentation et de diminution. Archévaïens: d'abord parce que l'augmentation et la diminution impliquent l'idée de grandeur; ensuite, parce qu'elles impliquent l'idée de variation. Or toute variation suppose l'identité d'une chose qui passe par divers états de grandeur, constants: la variation est relative à la constance. Avant de parler de grandeurs variables, il faut connaître les grandeurs constantes auxquelles la première est censée devenir égale.

Autre définition: Toute chose qui peut être dite égale ou inégale à une autre. Encore archévaïens: car l'idée d'égalité suppose comme celle de grandeur, toute relation implique la connaissance des termes. Inverse, égalité signifie au fond identité de grandeur; pour savoir que deux objets ont la même grandeur, il faut évidemment d'abord ~~la~~ concevoir leur grandeur.

— Néanmoins, cette définition suffit à caractériser l'idée indéfinissable de grandeur, en indiquant la relation essentielle qui existe entre deux grandeurs de même espèce, et sous quel rapport elles peuvent être comparées. En outre, elle sert à définir l'espèce de grandeurs: deux grandeurs sont de même espèce si l'on peut les comparer, c.à.d. dire qu'elles sont égales ou inégales. Pour qu'on puisse comparer 2 grandeurs, il faut qu'elles soient identiques qualitativement ~~et~~ ^{et} qu'elles relèvent du même concept.

Le concept général de chaque espèce de grandeur est toujours considéré comme une grandeur (générique ou spécifique dont toutes les grandeurs) seraient des états. La totalité des états de grandeur d'une certaine espèce constitue un ensemble de grandeurs. C'est un tel ensemble que nous allons considérer maintenant.

Les principes de la science des grandeurs sont les axiomes qui expriment les propriétés essentielles de la grandeur en général, et les relations fondamentales entre des grandeurs. Ces axiomes servent à caractériser l'idée de grandeur et en remplacent lui-même le lieu de définition.

1^{er} Axiome: Deux grandeurs de même espèce sont égales ou inégales (C'est la prétendue définition de la grandeur). Cet axiome affirme la disjonction complète entre les 2 cas. Il est fondé sur le principe de l'identité (ou du tiers-exclu).

2^e Axiome: Si $A = B$, on a: $B = A$.
Cet axiome affirme la réversibilité de la relation d'égalité. En effet, si l'égalité est l'identité de deux grandeurs, la relation est identique à la 1^{re} comme la 1^{re} à la 2^e. Seulement, il se peut qu'en fait la relation empirique par laquelle on définit ou vérifie l'égalité d'une espèce de grandeurs ne soit pas symétrique, auquel cas l'axiome s'applique et faut qu'on puisse renverser l'ordre des termes de la relation.
— On en déduit: Si $A \geq B$, on a aussi: $B \geq A$.

3^e Axiome: Si $A = B$, $B = C$, on a: $A = C$.
Deux grandeurs égales à une même 3^e sont égales entre elles. Cela résulte encore de l'identité qui est le fondement de la relation d'égalité.

Ces deux derniers axiomes peuvent se déduire d'un seul axiome fondamental :

Deux grandeurs égales peuvent se remplacer l'une par l'autre dans toutes leurs relations (de grandeur, bien entendu). Cet axiome peut servir de définition à l'égalité :

Deux grandeurs sont égales quand... etc. +

Cet axiome est le principe d'une foule d'axiomes secondaires,

par ex. : Si $A = A'$, $B = B'$, on a $A + B = A' + B'$.
~~Cet axiome est peut-être ici le signe d'une combinaison univoque~~
~~car au fond, c'est la définition de l'opération univoque~~

Exempl. : Si $A = B$, $B > C$, on a $A > C$.

ou encore : Si $A > B$, $B = C$ — $A > C$.

Maintenant, supposons qu'on ait défini une certaine combinaison de deux grandeurs de même espèce, c'est-à-dire une opération par laquelle, étant données 2 grandeurs, on peut trouver une 3^e grandeur ^(de la même espèce). On appellera celle-ci somme, et l'opération elle-même addition, si elle vérifie les axiomes suivants :

I. L'addition est une opération uniforme, c'est-à-dire donne un résultat unique et bien déterminé :

Si $A = A'$, $B = B'$, on a $A + B = A' + B'$ (Euclide II.)

II. Loi commutative : $A + B = B + A$.

III. Loi associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$.

De ces 3 axiomes il résulte que l'addition des grandeurs a exactement les mêmes propriétés que celle des nombres : dans une somme de grandeurs, on peut intervertir leur ordre et en remplacer ~~plusieurs par leur~~ somme effective.

Montrer comment les 2 axiomes de l'égalité s'en déduisent.

Axiome de la différence Si deux grandeurs sont inégales l'une d'elles est la somme de l'autre et d'une 3^e grandeur qu'on nomme leur différence.

Si $A = B + C$, on n'a pas: $B = A + C'$,
on dit alors que $A > B$. Cela détermine le sens de l'inégalité. $\} B < A$. (grandeurs absolues)

Si au contraire: $A = B + C$, $B = A + C'$,
 A et B sont inégales, sans que l'une puisse être dite plus grande ou plus petite que l'autre (n. im aginaires) ou du moins, il faudra définir autrement le sens de l'inégalité (p. ex. dans les n. qualifiés: différence positive).

Axiome réciproque: $A + B \geq A$ ($A + B > A$)
dans le cas particulier où la différence n'a qu'un sens.

De ces 2 axiomes on déduit les théorèmes suivants.

Si deux grandeurs ^(absolues) sont inégales, leur différence est inégale.
Ce théorème montre que la soustraction est uniforme.

Si $A = B + C$ on écrit: $C = A - B$.

Si $A = A'$, $B = B'$, on a: $A - B = A' - B'$ (Eucl. I, 26)

Si à des grandeurs ^{inégales} on ajoute des grandeurs ^{inégales}, les sommes sont inégales: $A + B > A' + B'$.

Si $A > A'$, $B \geq B'$ on a: $A + B > A' + B'$ (Eucl. I, 26)

Si à des grandeurs ^{inégales} on retranche des grandeurs ^{inégales}, les restes sont inégaux.

Si $A \geq A'$, $B \geq B'$, on a: $A + B \geq A' + B'$ (Eucl. I, 26)

Remarque Cet axiome remplace l'axiome VIII d'Euclide & c'est tout est plus grand que la partie » lequel est vrai & faux suivant l'espèce de grandeurs que l'on considère (on même n'a pas de sens).

Dans un ensemble de grandeurs relatives, on a
par hypothèse: En la fois

$$A = B + C$$

$$B = A + C'$$

D'où: $B = (B + C) + C' = B + (C + C')$

Cela veut dire que la grandeur $(C + C')$ a un effet
nul dans l'addition, ou est le module de l'addition:
nous la représentons par 0, et nous la définirons
par l'égalité: ~~AAA~~ $A + 0 = A$

ou celle-ci (équivalente): $0 = A - A$

Ainsi nous avons: $C + C' = 0,$

cà d: $(A - B) + (B - A) = 0.$

Ces deux grandeurs, dont la somme est nulle, seront
dites symétriques, par définition. On aura.

$$C' = 0 - C$$

Ainsi la symétrique d'une grandeur s'obtient en
retranchant cette grandeur de la grandeur nulle.

D'autre part: $C + C' = C - C = 0.$

On est ainsi amené à identifier C' ou $-C'$ avec $-C$,
cà d. à désigner le sym. de C par le symbole soustractif $-C$.
Dans un ensemble de grandeurs absolues, il n'y a pas
de grandeurs symétriques; en effet, $A + B > A$ et $> B$;
donc: $A = A + 0 > 0$. à fortiori: $A + B > 0$ et non $= 0$.

Pour construire un ensemble de grandeurs relatives,
il suffit d'adjoindre à un ensemble de gr. absolues la
grandeur nulle (mod. de l'add.) et leurs symétriques par
rapport à cette grandeur.

Deux grandeurs relatives ont donc deux différences
symétriques, suivant le sens de leur soustraction. Mais
la soustraction reste uniforme dans chaque sens à part.

+ Enfin, si $A > B$, $B > C$, on a $A > C$.
en vertu de l'axiome de la différence et de l'axiome:

$A + B > A$, valable seulement pour les gr. absolues.

— Cas particuliers de l'addition: 2 grandeurs égales.

On écrit: $A + A = 2A$.

et en général:

$$(n+1)A = nA + A.$$

Cad. que nA est la somme de n grandeurs égales à A .

On remarquera 1° que ce n'est pas une multiplication, n joue le rôle d'un indice: il indique combien de fois A figure dans la somme: $A + A + A + \dots + A$.

C'est une simple abréviation d'écriture.

2° que le ^{un nombre}~~coefficient~~ n est essentiellement entier.

En vertu de l'axiome de l'addition, si A est une grandeur, il existe une grandeur de même espèce égale à nA .

La réciproque est l'axiome de la divisibilité (cà d'identique).

Étant donnée une grandeur A et un nombre entier n , il existe une grandeur B de même espèce telle que

$$nB = A.$$

cà d. que A soit la somme de n gr. égales à B ; ou encore: que A est divisible en n parties égales.

On écrit dans ce cas: $B = \frac{1}{n} A = \frac{A}{n}$.

(C'est là qu'il ne s'agit pas d'une division véritable.)

On démontrera que cette division est uniforme, c'ad. qu'il n'y a qu'une grandeur B qui vérifie l'éq: $nX = A$.

On en conclut que, si: $A = B$, $\frac{A}{n} = \frac{B}{n}$.

On peut donc diviser 2 gr. égales par un même nombre. Lq 2
(multiplier au) (membres d'une eq. ou m. g. entre gr.)

1° Dans un produit, les 2 facteurs doivent être de même espèce.
On définira plus tard la vraie multiplication de grandeurs.

Axiome d'Archimède: Étant données 2 grandeurs de même espèce:

$$A > B,$$

il existe un nombre entier n tel qu'on ait:

$$nB > A.$$

cà d: ~~Si~~ ~~la~~ ~~plus~~ ~~petite~~ ~~que~~ ~~soit~~ ~~B~~, ~~si~~ ~~grande~~ ~~que~~ ~~soit~~ ~~A~~, ~~il~~ ~~existe~~ ~~un~~ ~~certain~~ ~~nombre~~ ~~de~~ ~~fois~~ ~~que~~ ~~des~~ ~~multiples~~ ~~de~~ ~~B~~ ~~peuvent~~ ~~surpasser~~ ~~A~~.

Cet axiome était déjà connu d'Euclide, ~~car~~ ~~il~~ ~~est~~ ~~un~~ ~~cas~~ ~~particulier~~ ~~de~~ ~~son~~ ~~5^e~~ ~~axiome~~ ~~sur~~ ~~les~~ ~~grandeurs~~ ~~et~~ ~~le~~ ~~rapport~~ ~~(V, 5)~~:

Deux grandeurs ont rapport l'une à l'autre, grand, étant multiples, elles peuvent se surpasser l'une l'autre. La plus petite, répétée un certain nombre de fois, peut surpasser la plus grande.

Cet axiome ~~ne~~ ~~résulte~~ ~~ni~~ ~~directement~~ ~~du~~ ~~précédent~~ ~~à~~ ~~peu~~ ~~près~~ ~~comme~~ ~~la~~ ~~division~~ ~~est~~ ~~liée~~ ~~à~~ ~~l'infini~~: en effet, en vertu du théorème précédent, on peut diviser les 2 membres par n :

$$nB > A$$

$$B > \frac{A}{n}.$$

Ceci veut dire: Si petite que soit B, on peut toujours diviser A en un nombre de parties assez grand pour qu'une de ces parties soit plus petite que B.

Cet axiome ne résulte nullement du précédent: en effet, celui-ci énonce simplement l'existence de $\frac{A}{n}$, quel que soit n , mais ne nous apprend pas quelle est la grandeur ou la petitesse. Tout ce qu'il permet d'affirmer, c'est que:

$$\frac{A}{n+1} < \frac{A}{n} \quad (1)$$

cà d que $\frac{A}{n}$ décroît quand n croît; mais non que $\frac{A}{n}$ décroît indéfiniment (devient plus petite que toute grandeur donnée, pour n suffis. grand).

(1) En effet, soit $A = nB = (n+1)C$. Si $B \leq C$, on aurait:

$$nB \leq nC < (n+1)C.$$

Donc: $B > C$.

17^e leçon

(Absolues)

Les axiomes précédents suffisent à la mesure des grandeurs. Soit exacte, soit indéfiniment approchée.

Mesurer une grandeur, c'est représenter par un nombre le rapport de cette grandeur à une autre grandeur d'une espèce, appelée unité (Sur le choix de rapport, voir plus loin).

N. B. Cette unité de grandeur ou de mesure n'a qu'un de commun avec l'unité arithmétique: elle est divisible. Par suite, les grandeurs ne peuvent être assimilées ^{aux} ~~des~~ nombres; elles sont seulement représentées par eux, au moyen d'une correspondance essentiellement relative à l'unité de mesure. Dire d'une longueur qu'elle est égale à 3, ~~c'est dire~~ ^{n'est pas dire} sans sens; il faut dire qu'elle est égale à 3 mètres. Cette correspondance n'est pas naturelle, mais artificielle et conventionnelle: aucun nombre n'appartient en propre et intrinsèquement à une grandeur déterminée.

1^o Si la grandeur à mesurer est un multiple de l'unité (le n-uple de l'unité) elle sera mesurée par le nombre entier.

$$\text{Si: } m = n, \quad m > n, \quad m < n,$$

$$\text{on a: } mU = nU, \quad mU > nU, \quad mU < nU,$$

et réciproquement. — On a de plus:

$$(m+n)U = mU + nU = (m+n)U \quad +$$

cà d. la somme de 2 grandeurs est mesurée par la somme des nombres qui les mesurent (les signes + ont des sens différents dans les 2 membres.)

$$m(nA) = (mn)A.$$

Si l'on multiplie une grandeur par un nombre, le nombre qui la mesure se trouve multiplié par le même nombre.

$$+ \text{ Le même: } mU - nU = (m-n)U \quad (m > n.)$$

Donc parallélisme complet entre les grandeurs et les nombres aux p. de vue de l'addition, de la soustraction et de la multiplication.

D'autre part, la multiplication et la division sont distributives:

$$n(A+B) = nA + nB$$

$$\frac{1}{n}(A+B) = \frac{1}{n}A + \frac{1}{n}B.$$

de même pour un nombre quelconque de grandeurs.

On démontre encore que:

$$\frac{m.A}{n} = m \frac{A}{n}$$

c'est que le n^e de $m.A$ est égal au m -uple de $\frac{A}{n}$:

On représente l'un et l'autre par la notation:

$$\frac{m}{n}A = B$$

qui équivaut à celle-ci: $mA = nB$.

L'ensemble des 2 nombres m et n constitue un facteur symbolique qu'on nomme fraction. Ce n'est pas un nombre.

Grâce aux fractions, on peut étendre l'idée de mesure.

Si la grandeur A à mesurer n'est pas un multiple de la unité B mais deux fractions est commensurable avec elle, c'est d'une partie aliquote de l'unité.

Si A et B sont multiples d'une même grandeur, on dit qu'elles sont commensurables entre elles:

$$A = aM$$

$$B = bM$$

$$\text{D'où: } M = \frac{B}{b} \quad A = a \frac{B}{b} = \frac{a}{b} B$$

Dans ce cas, la mesure de A par rapport à B est la fraction $\frac{a}{b}$ par laquelle il faut multipl. B pour former A . On dit encore que cette fraction exprime le rapport de A à B .

Cette fraction (facteur symbolique) indique qu'on doit diviser B par b, puis multiplier le résultat par a (ou inversement, en vertu de: $\frac{aB}{b} = a \frac{B}{b}$.)

On démontre: $\frac{m}{n}(A+B) = \frac{m}{n}A + \frac{m}{n}B$

$$\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right)A = \frac{m}{n}A + \frac{m'}{n'}A$$

d'où: $\frac{m+m'}{n}A = \frac{m}{n}A + \frac{m'}{n}A$

d'où: $\frac{m+m'}{n} = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n}$

Règle d'addition des fractions.

$$p\left(\frac{m}{n}A\right) = \frac{mp}{n}A$$

$$\frac{1}{q}\left(\frac{m}{n}A\right) = \frac{m}{nq}A$$

$$\frac{p}{q}\left(\frac{m}{n}A\right) = \frac{mp}{nq}A$$

d'où: $\frac{p}{q} \times \frac{m}{n} = \frac{mp}{nq}$

Règle de multiplication des fractions.

— Égalité. Deux fractions étant égales quand elles mesurent la même grandeur par rapport à la même unité.

Si: $\frac{p}{n}A = \frac{m}{n}B$, $A = \frac{p}{q}B$,

on a: $\frac{m}{n}B = \frac{p}{q}B$

$$nA = mB$$

$$nqA = mqB$$

$$qA = pB$$

$$nqA = npB$$

d'où: $mqB = npB$

$$mq = np$$

— Ainsi l'on définira: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ par: $mq = np$.

Donc la réduction des fractions à leur plus simple expression, fractions irréductibles, et leurs propriétés. — Et d'autre part

Réduction de plusieurs fractions au même dénominateur.

(1) Autre démonstration, un peu moins simple: $\begin{cases} A = aM, & A = a'M' \\ B = bM, & B = b'M' \end{cases}$ $\begin{cases} b'aB = b'A \\ a'bM = b'.aM \\ a'b = b'a. \end{cases}$

(notamment pour l'addition.)

Le cas où le rapport de 2 grandeurs est exprimé par une fraction irréductible est celui où elles sont mesurées par leur plus grande commune mesure. En effet, plus les nombres qui composent ce rapport sont grands, plus la commune mesure est petite, et réciproquement. Le même que toute fraction égale à une fraction irréductible a ses termes égaux multiples de ceux de celle-ci, de même toute commune mesure de 2 grandeurs est une partie aliquote de leur plus grande commune mesure. Pour abréger le processus de mesure, il est bon d'avoir une méthode pour trouver à coup sûr la plus grande commune mesure. Algorithme d'Euclide (comme pour le p.gcd de 2 nombres) se justifie de la même manière.

$$A = p_1 B + B_1$$

$$B_1 < B.$$

$$B_1 = p_2 B_1 + B_2$$

$$B_2 < B_1.$$

$$B_2 = p_3 B_2 + B_3$$

$$B_3 < B_2$$

$$B_{n-2} = p_{n-1} B_{n-1} + B_n$$

$$B_{n-1} = p_n B_n$$

$$A = p_a B_n$$

$$B = b B_n$$

$$A = \frac{a}{b} B.$$

En divisant tout par B_n , on trouve (en nombres).

$$a = p b + b_1$$

$$b = p_1 b_1 + b_2$$

$$b_{n-2} = p_{n-1} b_{n-1} + b_{n-1}$$

$$b_{n-1} = p_n$$

Ainsi a et b ont pour p.gcd. 1: ils sont bien premiers entre eux.

On calcule $\frac{a}{b}$ par une fraction continue:

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{p_n} \quad B_{n-2} = \left(p_{n-1} + \frac{1}{p_n}\right) B_{n-1}$$

$$B_{n-3} = \left(p_{n-2} + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}}\right) B_{n-2} \quad \text{etc.}$$

$$A = \left(p + \frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_2 + \dots + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}}}} \right) B.$$

on:

$$\frac{a}{b} = p + \frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_2 + \dots + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{p_n}}}}$$

En résumé, toutes les grandeurs commensurables avec les
peuvent se mesurer, soit par des nombres entiers, soit
des couples de nombres entiers (fractions) qui expriment
leur rapport (ou manière d'être) à l'égard de l'unité, etc.
plus exactement, qui indiquent le moyen de composer
ou de construire la grandeur mesurée, en partant de l'unité.
Ce rapport se représente par: $\frac{A}{B}$. On a donc,

Soit: $\frac{A}{B} = n$ (ce qui signifie: $A = nB$) Soit: $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$,

ce qui signifie: $A = nM$, $B = bM$.

Si l'on considère les fractions comme les nombres rationnels
et qu'on les range par ordre de grandeur, on aura établi une
correspondance uniforme entre les grandeurs commensurables
et l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres

Mais toutes les grandeurs ne sont pas commensurables avec une grandeur quelconque, en vertu de la continuité. Dans le cas de deux grandeurs incommensurables, l'algorithme d'Euclide est illimité, et ne donne aucun résultat (n'aboutit à aucun nombre rationnel.) Néanmoins, il définit avec exactitude le rapport des deux grandeurs, en indiquant quels sont, en permettant de répartir tous les nombres rationnels en deux classes: ceux qui sont plus grands que ce rapport; ceux qui sont plus petits. On dit qu'il définit alors un nombre irrationnel qui exprime ce rapport.

— L'ensemble des grandeurs possède les propriétés suivantes: (1)

1° Entre deux grandeurs différentes il y en a une autre, et par suite une infinité.

2° Il n'y a dans l'ensemble aucune grandeur qui soit plus grande ou plus petite que toutes les autres.

3° Une grandeur quelconque partage l'ensemble en 2 classes, celle des gr. inférieures et celle des supérieures; toutes les grandeurs de la 1^{re} cl. sont inférieures à celles de la 2^e cl. et vice versa; enfin dans la 1^{re} cl. il n'y a pas de grandeur maxima, ni dans la 2^e cl. de grandeur minima.

— La continuité de l'ensemble des grandeurs consiste dans la réciproque de cette dernière propriété.

Supposons que dans l'ensemble G des grandeurs d'un même espèce on ait pris un ensemble H jouissant des propriétés précédentes. Il pourra présenter deux sortes de

(1) Dedekind y joint celle-ci: Si $A > B$, $B > C$ $A > C$ qui n'est pas un axiome, mais une conséquence des axiomes.

Supposons qu'on puisse le partager en 2 classes jouissant des propriétés précédentes, et telles, en outre, que la différence entre 2 grandeurs reçues pris respectivement dans les 2 classes soit plus petite que toute grandeur donnée (ce qui a lieu si l'ensemble H vérifie l'axiome d'Archimède). Dans ce cas, ~~l'axiome de la continuité~~ ^{on dit que l'ensemble H} présente une coupure.

Axiome de la continuité peut s'énoncer ainsi:

Un ensemble de grandeurs G est continu, si à toute coupure d'un ensemble H correspond une grandeur, et une seule, de l'ensemble G .

Cette grandeur est plus grande que toutes celles de la classe plus petite que toutes celles de la 2^e; elle est dite combler la coupure, on en conçoit la représentation; car on peut définir cette coupure: on range dans une classe H toutes les grandeurs plus petites, dans l'autre toutes les plus grandes, et on la supprime elle-même la coupure se trouve ainsi réalisée.

— Considérons l'ensemble des grandeurs commensurables (avec l'unité, donc entre elles). Il présente une infinité de coupures, représentées par des grandeurs incommensurables. À ces grandeurs incommensurables on fait correspondre ~~à~~ ^{chaque} un nombre irrationnel qui vérifie les mêmes inégalités: par ex. si:

$$\frac{m}{n} B < A < \frac{m+1}{n} B$$

Ca'd: $m B < n A < (m+1) B$

on fera ce n irrat. α vérifiera les inégalités:

Définition de l'égalité: Deux nombres irrationnels égaux sont identiques. Chaque coupure (puisque elle définit un seul) correspond à la même coupure (puisque elle définit un seul). Comme dit Hoüel, un nombre irrationnel exprime la valeur d'une grandeur incommensurable avec l'unité.

$$\frac{m}{n} < \alpha < \frac{m+1}{n}$$

$$\text{ou } m < \alpha n < m+1.$$

La création des nombres irrationnels étant ainsi justifiée par la considération des grandeurs incommensurables, peut en être détachée et s'exposer à part. On posera en principe que toute coupure de l'ensemble des nombres rationnels doit être comblée par un nombre irrationnel. Mais si, philosophiquement, les nombres rationnels ne sont pas de vrais nombres, les nombres irrationnels n'ont, a fortiori, aucune raison d'être en arithmétique.

On définit alors l'addition des nombres irrationnels:

Soient 2 nombres irrationnels α, β , définis par les inégalités: $\alpha < \alpha' < \alpha'$, $\beta < \beta' < \beta'$.

Les 2 classes $(a+b), (a'+b')$, définissent un nombre, et un seul (rationnel ou irrationnel) qui est, par définition dans ce cas, la somme $\alpha + \beta$. (1)

On définit de même la multiplication des irrat.:

Les 2 classes $(ab), (a'b')$ définissent un nombre, et un seul, qui est (par définition, s'il est irrationnel) le produit $\alpha\beta$. (2)

On étend aux nombres irrationnels les propriétés des opérations arithmétiques. On peut donc confondre avec les nombres rationnels sous le nom de nombres réels.

(1) Elle est plus grande que toute somme $(a+b)$ et plus petite que toute somme $(a'+b')$.

(2) Elle est plus grande que tout produit (ab) et plus petite que tout produit $(a'b')$.

Revenons à la mesure des grandeurs.

Si une grandeur A est incommensurable avec l'unité, elle définit un nombre irrationnel α . On définit par ce nombre le rapport de A à V , ou la mesure de A par rapport à V : on écrit: $\frac{A}{V} = \alpha$, $A = \alpha V$ et l'on considère encore A comme le produit de l'unité par le coefficient α (symbolique, car il n'indique aucune opération exécutable à effectuer sur V pour

Remarque: Quand on veut exprimer un nombre irrationnel en chiffres décimaux (ou en fraction systématique), on tire une infinité de chiffres (ou de termes). Cela n'a rien de rationnel ni d'absurde, et ne prouve nullement que le rapport à exprimer n'existe pas et n'est pas bien déterminé. Ce n'est pas plus que de voir un rapport rationnel exprimé par une infinité de chiffres décimaux: $\frac{2}{3} = 0,666\dots$ est aussi bien représenté que $\frac{3}{4}$ par $0,75$, ou $\frac{7}{8}$ par $0,875$.

Ces deux faits viennent de ce qu'on a pris pour unités des grandeurs incommensurables avec la grandeur à mesurer ($\frac{2}{3}$ ne contient par un nombre exact de $\frac{1}{10}$, de $\frac{1}{100}$, etc.)

— Axiome de la continuité implique l'axiome de l'Archimède et par suite la divisibilité à l'infini. Si on le joint à l'axiome de la divisibilité, et par suite à l'axiome de l'Archimède, on peut en déduire l'axiome de la divisibilité, et par suite à l'axiome de l'Archimède.

— Une fois constitué l'ensemble des nombres réels, défini des propriétés purement arithmétiques, l'axiome de la continuité peut énoncer comme suit: « Tout nombre réel correspond à une grandeur et un seul de l'ensemble considéré. » Cela suppose le choix d'une unité de mesure, et par suite l'axiome de la mesure. De plus, il ne faut pas oublier que la correspondance entre grandeurs et nombres est conventionnelle et arbitraire.

Passons aux grandeurs relatives; par ^{hypothèse} définitions, on a à la fois: $A = B + C$ $B = A + C'$

D'où: $B = (B + C) + C' = B + (C + C')$

Ainsi la grandeur $(C + C')$ a un effet nul dans l'addition; on est le module de l'addition; on la représentera par 0 / (mod de l'add. de nombres)

Par définition: $A + 0 = A,$

d'où: $0 = A - A.$

Les deux grandeurs C et C' , dont la somme est 0, sont appelées symétriques. On peut écrire:

$$C' = 0 - C \quad C = 0 - C'.$$

Ainsi la symétrique d'une grandeur s'obtient en retranchant cette grandeur de la grandeur nulle.

Expr. Deux grandeurs relatives ont donc deux différences symétriques, suivant le sens de leur construction. La soustraction n'en reste pas moins uniforme dans chaque sens pris à part. On a:

$$(A - B) + (B - A) = 0.$$

Dans un ensemble de grandeurs absolues, il n'y a pas de grandeurs symétriques: car si $(A - B)$ existe, $(B - A)$ n'existe pas. On dit alors, par définition, que $A > B$. à quel point a: $A = B + C$ ($C > 0$)
Donc on peut affirmer, en général, que:
 $B + C > B$ $B + C > C.$

Parsuite: $A = A + 0 > 0$ à fortiori: $A + B > A > 0.$
cà d la somme de 2 gr. abs. ne peut être nulle.

Pour construire avec cet ensemble un ensemble de grandeurs, il suffit d'adjoindre à chaque grandeur une grandeur symétrique : à $C = A - B$, on fera correspondre une grandeur $C' = 0 - C$, qui sera par définition la différence $B - A$. — Pratiquement cela consiste à prolonger au-delà de la grandeur nulle l'opération appelée soustraction (par hypothèse, elle est possible dans les deux sens, sans exception.)

On a à la fois: $C + C' = C - C = 0$,

ou plus généralement: $B + C' = B + 0 - C = B - C$

On obtient ainsi une grandeur ajoutée C' équivalente à retrancher son symétrique C . On est conduit par là à associer $+C'$ et $-C$, ou $+C$ et $-C'$, et à employer les signes opératoires $+$ et $-$ pour désigner les grandeurs symétriques (et le signe $-$ pour désigner le symétrique d'une grandeur quelconque.)

On appellera positives les grandeurs primitivement absolues; negatives, leurs symétriques.

Toutes les grandeurs positives (absolues) sont > 0 ; pour conserver la définition de l'inégalité, on dira que $A > B$, si $A - B > 0$ (càd est positive).

Or: $0 - C' = C > 0$ (par hyp.) donc: $0 > C'$

Toutes les grandeurs négatives sont plus petites que 0.

On peut donc dire qu'on a: qu:

$A < B$, si $A - B < 0$ (càd est négative)

Les 2 définitions concordent, puisque si $A - B$ est pos. $B - A$ est nég. et réciproquement.

Si $A = B$, $A - B = B - A = 0$.

Deux grandeurs symétriques égales sont nécessairement nulles car on a à la fois: $C + C = 0$ $C - C' = 0$.

La théorie des grandeurs relatives ou symétriques
s'applique à toutes les grandeurs à deux sens ;
segments de droites ; angles (sens de rotation) ; et
même surfaces et volumes (sens d'un triangle ou
d'un parallélogramme, de un tétraèdre ou de un
parallélépipède). Chacune de ces espèces de grandeurs
peut servir d'exemple et d'illustration à cette théorie,
qui est en est indépendante, et est générale (ainsi
elle s'appliquera aux temps, aux vitesses, aux forces, aux
températures ; aux intensités de courant (d'un sens) etc.)

— Nous allons considérer un ensemble de grandeurs
à deux dimensions : c'est chaque grandeur complexe
dépend de 2 grandeurs simples ou réelles, telles que
celles que nous avons étudiées jusqu'ici. On pourrait
faire cette théorie in abstracto et d'une manière générale,
mais il vaut mieux l'éclaircir par un exemple concret,
qui servira en même temps à illustrer la théorie des
grandeurs réelles.

Ensemble des vecteurs dans le plan. Définition du
vecteur : ~~par~~ Egalité de 2 vecteurs, en grandeur, en
direction et en sens. Chaque vecteur est défini par
2 grandeurs, sa longueur (module) et sa direction
(argument).

Pour plus de commodité, on le définira par deux
grandeurs homogènes, 2 longueurs, ses projections
sur 2 axes rectangulaires. On Ox, Oy (avec sens) (1)
Ces 2 ~~longueurs~~ ^{projections} ~~sont~~ ^{sont mesurées par des nombres} ~~mesurées~~ ^{réels} x, y .
Tout vecteur équivaut à un vecteur issu de l'origine.

(1) N.B. On sait mesurer des longueurs, c'est les représenter par
des nombres réels qualifiés.

(duplan)

On peut donc réduire l'ensemble des vecteurs à celui des vecteurs issus de l'origine, ou (comme chacun est alors déterminé par son extrémité) à l'ensemble des points du plan : leurs coordonnées rectangulaires étant x et y .

Addition des vecteurs. On porte le 2^e (parallèlement à lui-même) au bout du 1^{er}, et on joint l'origine du 1^{er} à l'extrémité du 2^e. Le vecteur ainsi construit est leur somme.

$$AB + BC = AC \quad (\text{formule de Mœbius})$$

L'addition ainsi définie est commutative & associative. Son module est le segment dont les 2 extrémités coïncident.

On a aussi : $AB + BC + CA = 0$.

Cette formule générale justifie les règles d'addition des nombres qualifiés : Un vecteur peut être figuré par un déplacement sur l'axe des x réel.

Construction : Pour retrancher un vecteur, on ajoute son symétrique. En effet, si : $AC = AB + BC$

$$AC - BC = AB \quad \text{ou} : AC + CB = AB$$

La soustraction étant définie l'opposé inverse de l'addition. Dans le plan ; Chaque vecteur est la somme des ses projections sur l'axe des x et y : $x + iy$

i indiquant l'unité portée sur l'axe Oy (dans le sens positif pour la distinguer de l'unité sur Ox (représentée par 1)).

Somme de 2 vecteurs : $A_1 B_1 + B_1 C_1 = A_1 C_1 \quad A_2 B_2 + B_2 C_2 = A_2 C_2$

Donc : $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Inversement : $AB = OB - OA$

d'où : $(x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1) = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$

+ Les vecteurs symétriques ne diffèrent que par le sens : $AB + BA = 0$.

Multiplication des vecteurs. Le produit doit être au multiplicande ce que le multiplicateur est à l'unité. Or le rapport de 2 grandeurs complexes est complexe: le rapport de grandeur (rapport des longueurs); le rapport de direction (angle, ou différence des arguments.)

~~$z_0 \times z_{0'}$~~ ~~$= r_{0+0'}$~~ L'opération se ramène à une construction de triangles semblables (directement, car en tenant compte de leur sens.) En effet, puisque

$$OA : OB :: OC : OD, \quad \text{et faut que l'on ait:}$$

$$a : b = c : d \quad \text{et} \quad \alpha - \beta = \gamma - \delta.$$

Si a est l'unité réelle $+1$, $a = 1$, $\alpha = 0$:

$$b = d,$$

$$\beta + \gamma = \delta.$$

D'où la règle

$$z_0 \times z_{0'} = r_{0+0'}$$

Le produit de 2 vecteurs a pour longueur le produit de leurs longueurs, et pour argument la somme de leurs arguments.

Cette multiplication est évidemment commutative et associative (puisqu'elle se compose de 2 opérations, add. et mult., qui jouissent de ces propriétés.) Elle est en outre distributive par rapport à l'addition. (2)

Cette définition générale de la multiplication justifie d'abord les règles de mult^{on} des nombres qualifiés (1) et la règle des signes (ch. signe $-$ représente une rotation de 180° autour de l'origine.) $(-1)(-1) = +1$

La mult^{on} par i représente une rotation de 90° :

$$(+i)(+i) = -1.$$

$$i^2 = -1,$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Ces formules définissent le rôle que joue l'unité i dans la mult^{on}.
 (1) Remarque: Cela donne un sens à la mult^{on} d'une grandeur par un nombre réel, ce nombre représentant le rapport de 2 grandeurs.
 (2) (v. Hevel.)

Par conséquent, comme la mult^{an} des vecteurs possède toutes les propriétés de la mult^{an} algébrique, elle sera exprimée par la formule:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

+ Ainsi la théorie des nombres imaginaires résulte de celle des grandeurs à 2 dimensions. Sans doute, son origine historique se trouve dans l'algèbre (racines imaginaires, c'est-à-dire racines carrées de nombres négatifs); mais ces symboles numériquement absurdes n'ont pris un sens que grâce à l'interprétation géométrique de Argand. Cette interprétation est trop particulière: elle n'est qu'une illustration de l'interprétation générale, qui consiste à considérer les nombres complexes comme représentant des grandeurs à 2 dimensions.

L'ensemble des nombres complexes forme la base de l'Analyse, parce que c'est l'ensemble le plus général dans lequel on puisse effectuer les ~~opérations~~^{transformations} qui puissent être soumis aux règles du calcul algébrique, c'est-à-dire à des opérations possédant toutes les propriétés des opérations arithmétiques; et en même temps c'est l'ensemble assez vaste pour que toutes les opérations y soient possibles sans exception, et que par suite le calcul algébrique (la résolution des équations) n'y soit sujet à aucune restriction. (On verra plus tard comment le théorème fondamental de l'algèbre se démontre pour cet ensemble.) C'est pourquoi il n'y a pas d'imaginaires à 3 dimensions.

+ d'où, en faisant: $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, on peut déduire les formules d'addition de la Trigonométrie (cf. Hoüel et Stolz)

C'est l'ensemble des nombres imaginaires, où: $\{e = 1, i = \sqrt{-1}\}$
 Dans cet ensemble, le produit de 2 nombres n'est nul que
 l'un des facteurs est nul. La division par un nombre
 nul est donc toujours possible et univoque.

Cet ensemble est donc le seul qui possède toutes les propriétés
 énoncées, c'est-à-d. qui vérifie toutes les lois du calcul algébrique
 (qui sont celles du calcul arithmétique.) En d'autres termes
 cet ensemble de grandeurs est le seul qu'on puisse représenter
 par des nombres soumis aux mêmes règles de calcul que
 les ^{complexes} nombres réels ou rationnels.

Question: Y a-t-il des ensembles de grandeurs à
 n dimensions qui jouissent des mêmes propriétés
 Pour le savoir, on construit un ensemble de nombres composés
 à n unités, et l'on suppose qu'il « vérifie les lois commutative
 et associative de l'addition, puis les lois commutative, as-
 sociative et distributive de la multiplication (avec un do-
 minant) »

Dans ces conditions, on peut ~~représenter~~ ^{le rapporter à} n unités e_1, e_2, \dots, e_n telles que:

$$e_i e_i = e_i,$$

$$\text{et que: } e_i e_k = 0 \quad \text{pour } i \neq k$$

Alors le produit de 2 nombres a la formule:

$$(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) (b_1 e_1 + \dots + b_n e_n) = a_1 b_1 e_1 + \dots + a_n b_n e_n$$

Le mod. de la mult. est: $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$.

Il y a des nombres non nuls dont le produit est nul

$$\text{par ex: } \alpha = a_1 e_1 + \dots + a_k e_k \quad \beta = b_{k+1} e_{k+1} + \dots + b_n e_n$$

$\alpha \beta = 0$. L'ensemble se décompose en ensembles par-
 tiels que chaque nombre de l'ensemble total soit la somme
 de composantes appartenant respectivement à ces ensembles par-
 tiels.

Deux nombres appartenant à 2 ensembles diff. ont toujours
 un produit nul.

Au contraire, le produit de 2 nombres d'un ens. part est un nombre du même ensemble, et il n'est mit que si l'un des facteurs est nul.

Or ces ensembles partiels sont à 1 ou 2 unités. Si un ensemble partiel n'a qu'une unité, il est semblable à l'ensemble des nombres réels. S'il a deux unités, il est semblable à l'ensemble des nombres imaginaires. (On a pareil: $ee = e$, $ei = ie = i$, $ii = -e$.)

Ainsi un ensemble de grandeurs à n dimensions qui ~~verifie~~ obéit aux règles du calcul algébrique se décompose en ensembles partiels semblables à celui des nombres réels et à celui des nombres imaginaires.

De plus, il comporte toujours des diviseurs de zéro. C'est pourquoi l'ensemble des nombres imaginaires est le plus général qui puisse servir de base à l'Analyse, car il convient qu'on puisse y effectuer toutes les opérations arithmétiques sans exception ni équivoque.

Néanmoins, les ensembles de grandeurs à n dimensions possèdent certaines propriétés générales, relatives à l'ordre et à la situation de leurs éléments, qui font l'objet de la théorie générale des ensembles.

Un ensemble de grandeurs à n dimensions s'appelle l'espace à n dimensions (par une métaphore géométrique). Cela signifie que chacune des grandeurs de cet ensemble dépend de n grandeurs linéaires, mesurées par n nombres réels, qu'on nomme ses coordonnées. On la représente par un nombre complexe (x_1, x_2, \dots, x_n) ou:

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Mais l'ensemble des nombres complexes n'est qu'une représentation d'un ensemble continu de grandeurs, comme l'ensemble des nombres réels représente l'ensemble des segments d'une droite, et ceux des n imaginaires, ceux des vecteurs du plan ⁽²⁾.

Comme dans ce dernier cas, on remplace la grandeur de coord (x_1, x_2, \dots, x_n) par le point (x_1, x_2, \dots, x_n) qui constitue un élément de l'espace à n dimensions.

Dans l'ensemble total (continu) des grandeurs à n dimensions, on peut distinguer une infinité d'ensembles partiels, composés de points de l'ensemble ou points caractérisés par certaines propriétés. C'est de ces ensembles, qu'on se ~~constitue~~ extraits de l'espace à n dimensions, qu'on va s'occuper désormais.

Ecart de 2 points (ou différence de 2 grandeurs):

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|.$$

Leur distance est: $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

Leur ~~et~~ autres s'accumulent à la fois, seulement quand on a à la fois: $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

La seule différence est que si l'on fixe une limite supérieure à l'écart et à la distance des points qui environnent un point fixe donné, l'ensemble de ces points forme dans le 1^{er} cas un cube, dans le 2^e cas une sphère. Le cube ou cette sphère sera ce qu'on appellera le voisinage du point donné.

(2) Il faut remarquer, en effet, que ce qui fait l'unité du nombre complexes, c'est l'unité de la grandeur qu'il représente; autrement, il n'est plus que le rapprochement conventionnel et arbitraire de n nombres réels dans un cart. ord.

+ (1) C'est qu'une coordonnée prend toutes les valeurs de l'ensemble continu des nombres réels.

Point limite: Un point P de l'espace à n dimensions sera un point-limite de l'ensemble E , s'il y a dans son voisinage un point de E , si petit que soit ε . Ainsi l'on prendra ε_1 , il y aura un point de E dont l'écart sera $< \varepsilon_1$. On prendra alors ε_2 inférieur à cet écart; il y aura un autre point de E dont l'écart à P sera $< \varepsilon_2$; et ainsi de suite. On peut déterminer ainsi une suite infinie d'écarts décroissants: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ et de P une suite infinie de points $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ qui se rapprochent indéfiniment du point-limite P .

+ Remarque: Le point-limite P peut appartenir ou ne pas appartenir à l'ensemble E . Exemple: l'ensemble des points: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ a pour point-limite 0 .

On peut donc dire qu'un point-limite est tel, qu'il y a ~~un~~ dans son voisinage une infinité de points de l'ensemble E (puisque chaque écart contient l'infinité des points suivants.)

Inversement, un point Q de l'ensemble E n'est pas nécessairement un point-limite; dans ce cas il y a un certain écart ε au-dessous duquel il n'y a plus de points de l'ensemble dans le voisinage du point P . Un tel point est appelé isolé.

Un ensemble qui ne contient que des points isolés est dit lui-même isolé.

Ensemble dérivé de P : ensemble des points limites de P .
Un ensemble est fermé, s'il contient son dérivé.
condensé, s'il est contenu dans son dérivé.
parfait, s'il est identique à son dérivé.

○ Tout ensemble dérivé est fermé.

Exemple: L'ensemble des nombres rationnels a pour dérivé l'ensemble des nombres réels; il est donc caduc; et l'ens. des nombres réels est parfait.

Définition de la continuité d'un ensemble à n dimensions. Un ensemble continu doit deabord être fermé parfait. Il suffit pas qu'entre deux points il y en ait toujours un autre. Bozano disait que chacun de ses points doit avoir un voisin qui n'est pas un point limite. Inversement, un ens. continu doit contenir tous ses points-limites.

Mais cela ne suffit pas: car un ensemble parfait peut être composé de plusieurs ensembles parfaits séparés, c-à-d. tels que les écarts entre 2 de leurs points restent toujours $> \epsilon$.

Il faut donc en outre que l'ensemble soit dense tel que (Jordan) ou connexe (Cantor) en chaîne enchaînée: c-à-d. qu'on puisse passer de tout point à tout autre point par une chaîne de points (app. à l'ens.) tels que l'écart de 2 points consécutifs soit $\leq \epsilon$.

Un ensemble continu est donc à la fois connexe et parfait. (Il suffit qu'il soit fermé et connexe: car un ensemble fermé et connexe est par la même parfait: Jordan.)

Théorème de Weierstrass: Tout ensemble borné et infini possède au moins un point limite.

L'ensemble E a pour complémentaire l'ensemble E' , des points de l'espace à n dimensions qui n'appart. pas à E . La frontière de E , E' , se compose des points qui appart. à la fois à E et à E' , ou bien à E , et à E' .

L'intérieur de E comprend les points de E qui n'appart. pas à E' . — L'extérieur de E (ou intérieur de E') comprend les points de E' qui n'appart. pas à E . (Les points de la frontière appart. à la fois à E et à E' .)

— Théorème: La frontière d'un ensemble est toujours un ensemble fermé (qui contient son dérivé).

Exemple: L'ensemble des n rationnels est connexe et borné. Si on lui ajoute les n irrationnels (p. limites) il devient parfait.

Exemples: L'ensemble des nombres rationnels entre 0 et 1 n'a pas de intérieur: tous ses points sont frontières. L'ensemble des nombres irrationnels.

Dans un ensemble linéaire (à 1 dimension), on peut définir la limite supérieure et la lim. inf. (ce sont les 2 points-frontières extrêmes.) *borne*

N. B: Il est faux de dire qu'un ensemble contient un maximum et un minimum; cela peut être plus vrai que pour un ensemble fini de grandeurs.

Bolzano a remarqué le premier la fausseté de cet axiome: il le remplace par le théorème suivant: (1817)

Si un ensemble E ne contient pas une ~~grande~~ ^{grandeur} maxima, l'ensemble des grandeurs plus grandes que toutes celles de l'ensemble E contient une grandeur minima. Cette grandeur (la plus petite des grandeurs supérieures à toutes celles de E) s'appelle limite supérieure de E .

De même si un ensemble E ne contient pas de grandeur minima, il y a une grandeur plus grande que toutes celles de E . L'ensemble des grandeurs plus petites que toutes celles de E contient une grandeur maxima. Limite inférieure de E .

Comment on prouve l'existence de la limite supérieure et comment on la détermine: (ou du maximum):

On range dans une 1^{re} classe toutes les grandeurs de l'ensemble E et toutes celles qui sont plus petites qu'une d'elles; et dans une 2^e classe toutes les grandeurs plus grandes que toutes celles de E . On définit ainsi une coupure qui, en vertu de la continuité des grandeurs, est représentée par une grandeur: soit la plus grande de la 1^{re} classe (c'est le maximum) soit la plus petite de la

2^e classe (c'est la limite supérieure),

De même pour le minimum ou la limite inférieure.

Propriétés caractéristiques de la limite supérieure L .

1^o Nul y a pas d'ensemble E de grandeurs supérieures à L ^{au moins} puisqu'il est plus grande que toutes les E .

2^o Quelle que soit la grandeur E il y a une grandeur de l'ensemble E supérieure à $L - \epsilon$ si petit que soit ϵ .

En effet, s'il n'y en avait pas, $(L - \epsilon)$ serait encore supérieure à toutes les grandeurs de E , et appartiendrait à la 2^e classe; donc L ne pourrait être la plus petite des grandeurs de cette classe.

Ces propriétés caractérisent la grandeur L : ~~Alors~~ ^{car} ~~la~~ ^{elle} ~~peut appartenir~~ ^{peut appartenir} à une grandeur inférieure à L , puisqu'il y a une grandeur E supérieure à $L - \epsilon$; donc $(L - \epsilon)$ ne peut être supérieure à toutes les grandeurs E . La 2^e ne peut appartenir à une grandeur supérieure à L , soit $L + \epsilon$: car alors il existerait une grandeur $(L + \epsilon) - \epsilon = L$ telle qu'aucune grandeur de E ne ~~soit~~ ^{soit} supérieure à L . La grandeur L est donc ~~la~~ ^{la} ~~plus petite~~ ^{la} ~~et bien~~ ^{bien} ~~discriminée~~ ^{discriminée} (par la répartition en 2 classes de toutes les grandeurs.)

Un nombre irrationnel (une grandeur incommensurable) est la limite supérieure de l'ensemble des nombres plus petits et la limite inférieure de l'ensemble des nombres plus grands. Cela est d'ailleurs vrai d'un nombre réel quelconque (d'une grandeur quelconque, rien ne distinguant les commensurables des incommensurables).

L'existence d'une limite, supérieure (ou inférieure) pour tout ensemble de grandeurs ^{borne} équivaut ~~à l'existence~~ ^{à l'existence} de la continuité (Burali-Forti, Formulaires, IV, Pp. 8.)

20^e leçon.

Suites, séries et produits infinis. (infini)

Une suite est une espèce d'ensemble: c'est un ensemble rangé dans un ordre linéaire, à partir d'un premier élément, de telle sorte qu'après chaque élément il y en a un ~~et un seul~~ ^{suivant} unique et bien déterminé (1).

Deux manières de donner une suite infinie:

On bien on donne le moyen de calculer chaque terme au moyen du précédent (loi de récurrence ou plutôt de formation progressive);

On bien on donne le moyen de calculer un terme connaissant son rang (c'est à dire fonction de son indice). De toute manière, c'est un ensemble bien défini et bien ordonné. (cette composition d'une infinité de nombres différents)

Si cet ensemble est borné, il a au moins un point-limite. Il peut même en avoir plusieurs, ou même une infinité. Mais si l'on en considère un à part, on pourra le isoler, en tenant compte de la borne de l'ensemble: on enclura de l'ensemble tout ~~nombre~~ ^{point} qui s'éloignera du p. limite plus que leur des précédents; de telle sorte que la suite se rapproche de plus en plus du point-limite (tende ou converge vers lui). Il aura une limite unique.

— Le caractère de la limite ^{est} qu'il y a toujours un point de l'ensemble dans son voisinage; on appellera voisinage d'un nombre réel α l'intervalle $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$; on, dans l'ensemble des nombres complexes, l'ensemble des nombres x tels que $|x - \alpha| \leq \varepsilon$, (le cercle de rayon ε représenté par).

(1) Une suite infinie est donc dénombrable à la suite naturelle des nombres entiers; elle peut lui correspondre, de sorte qu'on peut numéroté ^{tous} ses éléments: u_1, u_2, \dots, u_n .

soit u_n , le premier terme qui)
 Pour la constitution de la suite, si le terme u_n tombe dans
 l'intervalle ε , tous les termes suivants y tombent aussi.

Le caractère de la limite V est donc celui-ci : à tout nombre
 ε correspond un entier n , tel que pour tout entier $p > n$
 on a : $|V - u_p| < \varepsilon$. (pour les seuls termes) Ces particularités, limite
 à peu équivalent à : $V - \varepsilon < u_p < V + \varepsilon$ si $|u_p| < \varepsilon$

C'est-à-dire : tous les termes qui suivent u_n tombent dans
 l'intervalle $(V - \varepsilon, V + \varepsilon)$. Cela a lieu si petit que soit ε .

Remarque : Cette définition de la limite est plus restreinte
 que celle du point-limite, car il suffit qu'un point sorte
 de l'intervalle ε pour qu'il ne tombe en défaut (1)

et cela si petit que soit ε , ou si grand que soit n .

N. B. Un point-limite peut appartenir ou non à la suite.

Le même, la valeur-limite d'une suite peut en faire partie
 ou non. Ex : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ limite : 0.

$\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ limite : 0.

Conséquence de l'existence d'une limite V : Soient $p, q > n$.

$|V - u_p| < \varepsilon, |V - u_q| < \varepsilon$ donc : $|u_p - u_q| < 2\varepsilon$.

On dit que la suite est convergente si à chaque nombre pos.

ε correspond un entier n , tel que, pour tous les entiers

$p, q > n$, on ait : $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

C'est-à-dire : Si à partir d'un certain rang, tous les termes

diffèrent entre eux de moins de ε .

La convergence est une propriété intrinsèque de la suite,

indépendante de l'existence de la limite.

Définition équivalente : Si l'on a : $|u_n - u_p| < \varepsilon$ (ou plus)

ou encore : $u_n - \varepsilon < u_p < u_n + \varepsilon$ pour tout

(1) Ceci ne suffit-il plus qu'il y ait un nombre infini de

termes dans un intervalle fini : il faut encore qu'il n'y ait jamais

un terme hors de l'intervalle, il n'y en ait jamais qu'un qui continue à

nombre infini, et qu'il continue à tous les termes ultérieurs sans exception.

Toute suite qui a une limite est convergente; cela résulte évidemment de ce qui précède.

Réciproquement, toute suite convergente a une limite.

En effet, à partir d'un rang n tous les termes tombent dans l'intervalle $(u_n - \varepsilon, u_n + \varepsilon)$

et l'on peut resserer indéfiniment cet intervalle.

De deux choses l'une: ou bien il contiendra toujours zéro, et alors ^{les termes de la suite} ~~il y aura toujours~~ finiront par différer de zéro de moins de ε c'est-à-d. ont pour limite 0;

ou bien zéro finit par rester hors de l'intervalle ε .

Dans ce cas, on considérera ~~une~~ ^{la} suite nouvelle pour savoir si un nombre réel quelconque a est limite.

$u_1 - a, u_2 - a, \dots, u_n - a, \dots$

également convergente. Ou bien elle a 0 pour limite, c'est-à-d. que $|u_n - a|$ finit par devenir $< \varepsilon$;

alors u_n a pour limite a , par définition.

Ou bien ~~tous~~ les termes finissent par être tous positifs, ou tous négatifs (!) alors on rangera a dans la 1^{re} classe ou dans la 2^e. On répartira ainsi tous les nombres réels (sauf un) en 2 classes (car s'il y en avait 2, a et b , on devrait avoir: $|a - b| < 2\varepsilon$ si petit que fût ε , ce qui est contradictoire.)

Cette répartition définit un nombre réel qui sera la limite de la suite.

En particulier: Si une suite a ses termes constamment croissants, mais inférieurs ~~à un nombre~~ ^{en val. abs.} à une quantité donnée, elle a une limite (c'est un ensemble infini borné). (Dans ce cas, c'est la limite supérieure (ou inf.) de l'ensemble.)

(*) Plus généralement, leur valeur absolue finit par être plus grande qu'un nombre positif donné.

Si les suites u_n, v_n ont pour limites U et V ,
les suites $(u_n + v_n)$ et $u_n v_n$ ont pour limites
 $U + V$ et UV . (sont convergentes et)

Ainsi les opérations arithmétiques sur les termes
généraux des suites ~~correspondent~~ correspondent aux mêmes
opérations effectuées sur leurs limites.

Une fonction entière est une combinaison d'additions
et de multiplications. Donc: La fonction entière
 $f(u, v, w)$ a pour limite $f(U, V, W)$.

Séries et produits infinis. [infinimentés]

Sommes et produits d'un nombre infini de termes rangés
dans un ordre linéaire déterminé à partir d'un premier

La série: $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ est convergente

Si la suite: $S_n = u_1 + \dots + u_n$ est convergente.

Le produit infini: $u_1 u_2 \dots u_n \dots$ est convergent

Si la suite: $P_n = u_1 \dots u_n$ est convergente.

En somme, une série ou un produit n'est pas autre chose
qu'une loi de formation progressive d'une suite.

La limite d'une série ou d'un produit est la limite
de la suite correspondante ($\lim S_n, \lim P_n$)

Remarque: La limite 0 est exceptionnelle: aussi
on considère-t-on pas comme convergent un produit
qui a pour limite 0.

Ici la condition de convergence des suites résulte des
conditions de convergence des séries et des produits.

+ Leurs termes peuvent être donnés comme ceux d'une suite

147

Une série est convergente si à tout nombre ε correspond un n entier tel que pour tout p, n entier k on ait : $|\frac{1}{p} (S_{n+k} - S_n)| < \varepsilon$
 c'est-à-dire $|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}| < \varepsilon$. (ou $S_{n,k}$)

Un produit est convergent si tel que :
 $|p_{n+k} - p_n| < \varepsilon$ ou : $|u_1 u_2 \dots u_n (1 - u_{n+1} u_{n+2} \dots u_{n+k})| < \varepsilon$.
 c'est-à-dire : $|1 - u_{n+1} \dots u_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{p_n}$

En particulier, on doit avoir : $|u_{n+1}| < \varepsilon$
 c'est-à-dire que le terme général doit avoir pour limite 0
 (Condition nécessaire, mais non suffisante. Exemple :
 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$)

Pour le produit, on doit avoir en particulier : $|1 - u_{n+1}| < \eta$,
 c'est-à-dire que le terme général doit avoir pour limite 1.
 (Condition nécessaire, mais non suffisante.) Voilà
 pourquoi on ne considère pas comme convergent un
 produit qui a pour lim. 0 ; par ex.

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{n} \times \dots$$

On est ainsi amené à écrire un produit sous la forme
 $(1 + v_1)(1 + v_2) \dots (1 + v_n) \dots$

de sorte que, s'il est convergent, v_n a pour limite 0.

Une série à termes tous positifs engendre une suite à
 termes constamment croissants. Donc, si une somme
 infinie à termes positifs reste inférieure à une quantité fixe A ,
 elle est convergente, et a une limite au plus égale à A .

Une telle série reste convergente si l'on diminue quelques-uns de ses termes, en nombre fini ou infini.
 (ou supprime)
 La valeur absolue de $S_{n,k}$ ne peut que diminuer. (ou change de signe)
 Une telle série, quand elle est divergente, a une somme infinie.

Séries absolument convergentes: convergentes quand on remplace chaque terme par sa valeur absolue. On les transforme ainsi en séries à termes positifs.

Dans une série abs. convergente, on peut changer l'ordre des termes sans changer la limite ou somme de la série.

Dans une série non abs. convergente, on ne peut changer l'ordre qu'un nombre fini de termes, et on remplace par un nombre fini par leur somme effective. +

Si 2 séries sont abs. convergentes et ont pr. lim. resp. A, B , la série formée par la sommation de tous leurs termes (dans un ordre quelcun) sera abs. convergente et aura pour limite $A + B$.

De même la série formée par les produits 2 à 2 de tous leurs termes / ou d'aut. le terme gen. est:

$$(a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1)$$

est abs. convergente et a pour limite AB .

Ainsi les séries abs. convergentes jouissent de toutes les propriétés des sommes ou des polynômes. Toute fonction entière de leurs limites peut se développer / se reproduire en une série absolument convergente.

Pour qu'un prod: $(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots$ où tous les u sont de même signe soit convergent, il faut et il suffit que la série $(u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots)$ soit convergente.

Un produit est absol. convergent si la série corresp. est abs. convergente; c'ad qu'on peut intervertir l'ordre des facteurs. (Il joint de suite la propriété des produits finis)

+ De plus (propriété capitale): dans une série non absolument convergente, la somme dépend de l'ordre des termes: on peut lui assigner toute limite qu'on veut.

(1) Sans changer la limite. Il n'est pas nul que si l'un des facteurs est nul

Une série à termes complexes est convergente si les deux séries formées par les éléments réels et imaginaires de tous ses termes sont toutes deux convergentes. On est donc ramené à la considération des séries à termes réels. Mais c'est inutile, attendu que le critérium de convergence porte sur la valeur absolue des termes, et par suite s'applique également aux nombres complexes. D'ailleurs, le module d'une différence ne peut être inf. petit sans que les 2 éléments le soient :

$$|(x_n + iy_n) - (X + iY)| < \varepsilon \quad |x_n - X| < \varepsilon \quad |y_n - Y| < \varepsilon$$

Critères généraux de convergence et de divergence

On compare la série $\sum u_n$ (pour les séries à termes positifs) à étudier à une série $\sum v_n$ connue convergente ou divergente, c'est-à-dire qu'on considère le rapport: $\frac{u_n}{v_n}$.

Si le rapport finit par être compris (à partir d'un rang n) entre 2 nombres positifs a et b , les deux séries convergent ou divergent simultanément.

Si $\frac{u_n}{v_n}$ reste $\leftarrow b$ finit par devenir et rester $< b$, et si $\sum v_n$ est convergente, $\sum u_n$ l'est aussi.

Si $\frac{u_n}{v_n}$ finit par devenir et rester $> a$, et si $\sum v_n$ est divergente, $\sum u_n$ l'est aussi.

En particulier, si $\frac{u_n}{v_n}$ a une limite finie, il reste $= b$;

si $\frac{u_n}{v_n}$ a une limite non nulle, il reste $> a$.

On prend pour type de série convergente la progression géométrique: $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ ($|x| < 1$)

et la série: $\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots$ ($k > 1$.)

Type de série divergente: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

et la série géométrique pour $x \geq 1$.

De la considération de la série géométrique on déduit
les 2 critères de convergence suivants :

1° Si : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < k < 1$ convergence
 > 1 divergence

2° Si : $\sqrt[n]{u_n} < k < 1$, converg; > 1 , divergence.

De plus, si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ ont une limite,
cette limite est la même.

Dans le cas où : $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \sqrt[n]{u_n} = 1$, il y a
incertitude. (Voir les critères supérieurs de P. du Bois Reymond
ap. Stolz, § Arithmétique générale, ch. I.)

Autres critères, dus à Abel (v. Cauchy, § 71) :

Si l'on a une série convergente $\sum u_n$, et une suite de nombres
positifs décroissants E_n , la série $\sum E_n u_n$ est convergente.

Si l'on a une suite de nombres positifs décroissants telle
que $\lim E_n = 0$, et si $\sum u_n$ reste constamment inférieur
en valeur absolue à un nombre positif fixe, la série $\sum E_n u_n$
est convergente [cf. Méray, § 99; démonstration Riquier].

— Les suites et séries peuvent servir à la définition du nombre
irrationnel (Weierstrass, Cantor, Méray). Mais il y a plusieurs

inconvenients : 1° On a plusieurs expressions différentes du même
nombre irrationnel, ce qui oblige à définir l'égalité de 2 nombres
irrationnels ; 2° On est tenté de définir le nombre irrationnel

comme la limite de la suite ou série qui le définit, ce qui est
absurde en soi-même : la suite n'a de limite qu'une fois
le nombre irrationnel créé et défini. 3° Si l'on évite cette fois
la création du nombre irrationnel est arbitraire ; et cette fois

la théorie des suites et des limites : on est obligé de recommencer
la théorie pour les limites irrationnelles, alors qu'on n'en a pas
des limites rationnelles. C'est que

Cela prouve que la création du nombre infini doit être antérieure à la théorie des suites. En effet, le concept de limite repose sur la considération de la continuité des grandeurs; il faut donc avoir d'abord ~~un~~ défini cette continuité et en avoir construit un schéma numérique adéquat.

— Notes: M. Méray dit que les termes d'une suite finissent par, jouir d'une propriété, si à partir d'un certain rang n tous les termes la possèdent. (C'est un synonyme de la locution: devenir et rester.)

Théorème: Si u_n est une variante infiniment petite, qui décroît constamment, et si dans la série

$$O_1 + O_2 + \dots + O_n + \dots$$

la somme des p termes qui suivent le n^{e} reste finie (< H)
quels que soient n et p , la série:

$$O_1 u_1 + O_2 u_2 + \dots + O_n u_n + \dots$$

est convergente.

Démonstration de M. Riquier: En appelant $S_{n,p}$ la somme des p termes qui suivent le n^{e} dans cette dernière série, on a:

$$S_{n,p} = O_{n,1}(u_{n+1} - u_{n+2}) + O_{n,2}(u_{n+2} - u_{n+3}) + \dots \\ + O_{n,p-1}(u_{n+p-1} - u_{n+p}) + O_{n,p} u_{n+p}$$

$$\text{donc: } |S_{n,p}| \leq H[(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+2} - u_{n+3}) + \dots \\ + (u_{n+p-1} - u_{n+p}) + u_{n+p}] = H \times u_{n+1}.$$

Donc $|S_{n,p}|$ est infiniment petite. — On en conclut:

$$|R_n| \leq H \cdot u_{n+1} \quad (R_n \text{ reste de la série } O_n u_n)$$

21^e leçon (fin au infin)

Notion de fonction. Soit un ensemble de ^{grandeurs} valeurs
(nombres réels ou imaginaires): $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$
et un autre ensemble de ^{grandeurs} valeurs: $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$
qui correspondent respectivement aux premières; on
conçoit les premières comme les valeurs d'une variable x
les secondes comme celles d'une autre variable y : la
correspondance définit y comme fonction de x (1)

La fonction est dite uniforme si à une même valeur
de x correspond une seule et même valeur de y .

Une même correspondance définit 2 fonctions inverses
l'une de l'autre: l'une peut être uniforme sans l'autre.

(Exemple: $\sin x$ est uniforme; $\arcsin x$ ne l'est pas.)

On définit de même des fonctions à plusieurs variables
à chaque groupe de valeurs (x, y, z, \dots) correspond une
(ou plusieurs) valeur de la fonction.

En fond, une fonction à plusieurs variables peut être
fonction d'une seule grandeur variable représentée par
plusieurs nombres associés qui en sont les coordonnées.

Ainsi, par ex., on définit considérer souvent comme
fonctions de 2 variables réelles x, y les fonctions
d'une variable complexe $z = x + yi$. Les deux
points de vue peuvent avoir leurs avantages; mais,
en réalité, l'accouplement de x et de y n'est pas
fortuit, non plus que celui des 2 fonctions réelles
 $U(x, y) + iV(x, y)$ qui composent la fonction complexe. (2)
Chacune d'elles est une grandeur à 2 dim. unique.

(1) L'idée essentielle et fondamentale n'est pas celle de
variation, mais de correspondance; elle est statique, cinétique

Quand l'ensemble des valeurs de la variable indépendante et celui des valeurs de la fonction sont tous deux finis, la correspondance peut être donnée empiriquement par l'énumération des valeurs correspondantes. Mais dès qu'une ou l'autre est infinie, la correspondance ne peut être définie que par une loi générale. Une fonction peut donc exprimer ~~une~~ la loi de variation d'une grandeur en corrélation avec une autre.

Les lois les plus simples sont les lois algébriques, c'est-à-dire celles qui permettent de calculer la fonction au moyen de la variable par de simples opérations arithmétiques. Ces lois se représentent par des formules algébriques qui ne sont que des règles de calcul qu'il faut suivre. Elles engendrent les fonctions algébriques, les plus simples et les plus maniables de toutes. Mais, en principe, l'étude de fonction et la Théorie générale des fonctions dépasse infiniment le domaine du nombre et des opérations arithmétiques. Il ne faut pas s'attendre à ce que toute fonction se ramène aux fonctions algébriques, ni lui imposer d'avance cette condition extrêmement & arbitrairement restrictive (!).

— Les éléments des fonctions algébriques sont les nombres réels et complexes, dont l'ensemble est le plus général qui puisse être donné au calcul algébrique. Pour donner ~~une~~ à la Théorie des fonctions algébriques toute généralité, on prendra cet ensemble pour base.

(?) Ce qui n'empêche pas qu'il y ait avantage à ~~réduire~~ ^{ramener} les fonctions à la forme algébrique et qu'on doive y tendre.

Continuité de la variable indépendante: Grand ensemble des valeurs que prend la variable est continu. Dans l'ensemble des nombres réels, c'est l'intervalle (a, b) y compris ses limites c-à-d tous les nombres réels compris entre a et b , en y adjoignant ceux-ci: $a \leq x \leq b$. Si a ou b est exact, l'intervalle est semi-continu. Dans l'ensemble des nombres complexes, définit-on de Cantor. Un ensemble continu à 2 dim. est figuré par un arc à contour simple, y compris tous les points du contour. Sinon, il n'est que demi-continu.

Continuité de la fonction. L'idée de ^{la variation} ~~continuité~~ d'une grandeur est une notion intuitive ou instinctive (comme celle de la continuité). Elle suppose d'abord que la variable est continue, c-à-d que la fonction admette pour toutes les valeurs d'un ensemble continu. Elle implique, en outre, que si l'on fait tendre la variable x vers une de ses valeurs, x_0 , la fonction $f(x)$ tend vers la valeur correspondante $y_0 = f(x_0)$, et cetera, quelle que soit la suite $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ (prise dans l'ensemble de valeurs). La condition nécessaire et suffisante pour que cela ait lieu est que à tout nombre positif ε corresponde un autre nombre η tel que, pour toute valeur de x ^{satisfaisant} appartenant à l'ensemble et satisfaisant l'inégalité: $|x - x_0| < \eta$, on ait l'inégalité: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

En d'autres termes, à une variation très petite (inf. par) de x doit correspondre une variation très petite de $f(x)$.

Extension de la notion de limite. On a défini la limite pour une suite $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ c'est-à-dire pour une fonction définie pour toutes les valeurs entières de la variable. C'est là qu'un cas très particulier.

Supposons que le point x_0 soit un point-limite de l'ensemble des valeurs de x (qu'il appartienne ou non à cet ensemble). On dira que $f(x)$ tend vers la valeur y_0 quand x tend vers x_0 , si à chaque nombre pos. ε correspond un nombre pos. η tel que, pour toute valeur de x appartenant à l'ensemble et vérifiant l'inégalité :

$$|x - x_0| < \eta,$$

on ait l'inégalité :

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Par hypothèse, la 1^{re} inégalité peut toujours être vérifiée, si petit que soit η , puisque x_0 est un point-limite. La 2^e inégalité montre que y_0 doit être une p^{te} limite de l'ensemble des valeurs de la fonction (qu'il y appartienne ou non).

On exprime ce fait en disant que $f(x)$ a pour limite y_0 quand x a pour limite x_0 , ou :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \quad \text{pour} \quad \lim x = x_0$$

ou simplement :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0.$$

On voit que la continuité de la fonction peut se définir comme suit : ~~il faut d'abord que~~ une fonction est continue pour $x = x_0$ si elle a pour limite $f(x_0)$ quand x tend vers x_0 . — Cela suppose qu'elle est définie pour x_0 et pour une infinité de valeurs voisines ; mais non pour un ensemble

continue de valeurs comprenant x_0 . Cette nouvelle définition est donc plus générale que la première.

- Si la fonction $f(x)$ n'est pas définie pour $x = x_0$, mais si elle a une limite y_0 pour $x = x_0$, on peut la définir par continuité en posant: $f(x_0) = y_0$.

En effet, elle sera alors continue en ce point.

~~Si une fonction est continue pour toutes les valeurs d'un ensemble, elle sera continue dans tout intervalle pour une valeur d'un ensemble, si qui veut dire (par définition) qu'à tout n . pos. ϵ correspond un autre n . η tel que pour tout couple de valeurs x, x' appartenant à l'ensemble et vérifiant l'inégalité:~~

$$|x - x'| < \eta,$$

on a l'inégalité: $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Il est évident que une fonction continue dans un intervalle est continue pour toute valeur de cet intervalle.

On démontre la réciproque (Lamery, § 77):

Si une fonction est continue pour toutes les valeurs d'un certain intervalle (sens. continu) elle est continue dans ce intervalle.

Passage continu à la limite: $\lim x = x_0$ (Stolz)

x prend toutes les valeurs d'un intervalle $(x_0, x_0 \pm \delta)$ en passant d'une valeur à l'autre que par toutes les valeurs intermédiaires. Dans ces conditions, pour la fonction continue, on a: $\lim f(x) = f(x_0) = f(\lim x)$.

Mais il ne suffit pas qu'on ait cela pour une seule suite de valeurs de x : Exemple. $\lim \sin \pi x = 0$ pour $x = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ (série continue) mais $\sin \pi x$ oscille entre $+1$ et -1 pour $\lim x = 0$ et on peut choisir une suite de val. telle que $\sin \pi x$ ait telle limite qu'on veut.

(1) Ce qui revient à dire que le point x_0 ne fait pas partie de l'ensemble de valeurs de la variable indépendante.

Oscillation d'une fonction dans un champ. (1)

On considère l'ensemble des valeurs que la fonction prend dans ce champ (cà d. corresp. à toutes les valeurs de ce champ). Cet ensemble (s'il est borné) a une limite supérieure I et une limite inférieure L . Leur différence ($I - L$) est l'oscillation de la fonction.

Principe général de convergence (Cauchy, § 79):

Si à chaque nombre pos. ϵ correspond un n pos. n tel que l'on ait:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

pour toutes les valeurs x_1, x_2 appartenant à l'ensemble et vérifiant l'inégalité:

$$|x - x_0| < \eta,$$

la fonction $f(x)$ tend vers une limite quand x tend vers x_0 par des valeurs appartenant à l'ensemble.

Remarque. Les règles de convergence des suites rentrent comme cas particuliers dans ce principe.

Limites d'indétermination (Du Bois-Reymond)

d'une fonction pour: $\lim x = a$. On considère l'ensemble des valeurs $|x - a| < \delta$; à cet ensemble correspondent

des limites supérieure et inférieure de la fonction, I, L . Si l'on fait tendre δ vers 0, I et L tendent vers des limites respectives, S et I , lim. d'indétermination.

(en effet, I ne peut que diminuer, et L qu'augmenter, tout en restant bornées, donc elles ont des limites.)

Ces limites d'indétermination peuvent se définir ainsi: A tout nombre ϵ correspond un n pos. n tel

(1) Il faudrait ici définir ce qu'on entend par limite infinie (pos. ou nég.) et étendre en conséquence l'oscillation infinie.
définir

quelque η tel que
que, pour toute $|x - a| < \eta$,
on ait: $f(x) < S + \varepsilon$

mais que pour ~~quelque valeur~~ dans tout intervalle (a, x_0) où: $|x_0 - a| < \eta$
il y ait au moins une valeur x_1 pour laquelle on a:
 $f(x_1) > S - \varepsilon$

Le même η correspond à tout ε pour toute valeur de x telle que $|x - a| < \eta$,
on ait: $f(x) > S - \varepsilon$,

mais que, dans tout intervalle (a, x_0) où $|x_0 - a| < \eta$,
il y ait au moins une valeur x_1 pour laquelle on a:
 $f(x_1) < S + \varepsilon$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction
~~soit continue~~ pour $x = a$ est que: $S = I$.
ait une limite
car alors on a: $f(x) > I - \varepsilon < f(x) < S + \varepsilon$
pour tout x tel que: $|x - a| < \eta$

Démonstration de cette définition. La limite supérieure I
est définie par la propriété suivante: Dans le domaine $|x - a| < \eta$,
toutes les valeurs de $f(x)$ sont $< I$; mais il y en a au
moins une $> I - \varepsilon$.

D'autre part, la limite d'indétermination S est la
limite vers laquelle tend S quand η tend vers 0: ce
qui peut pour η suffis. petit, $|I - S| < \varepsilon$,
et comme $I \geq S$, $I < S + \varepsilon$.

Donc, dans le domaine $|x - a| < \eta$, toutes les valeurs de
 $f(x)$ doivent être $< I < S + \varepsilon$;
mais, si petit que soit η , il y en a toujours une qui est
 $> I - \varepsilon > S - \varepsilon$ c. q. f. d.

On peut encore distinguer la limite de $f(x)$ pour $a+\varepsilon$, et la limite de $f(x)$ pour $a-\varepsilon$. On les désigne par: $f(a+0)$, $f(a-0)$.

Pour que $f(x)$ ait une limite pour $x=a$, il faut et il suffit que: $f(a+0) = f(a-0)$.

Conséquences de la continuité des fonctions.

Si $f(x)$ est continue dans un ^{intervalle} ~~champ~~, et si pour 2 valeurs de ce ^{intervalle} ~~champ~~ elle prend des signes contraires, elle l'annule pour une valeur intermédiaire de x . (Cauchy, § 84.)

Corollaire: Soit une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle (a, b) , et N un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$; il y a dans l'intervalle une ~~valeur~~ ^{valeur} x pour laquelle on a: $f(x) = N$.

En effet, la fonction $f(x) - N$ est continue dans l'intervalle et y change de signe. Donc elle l'annule dans l'int.

Énoncé vulgaire: Une fonction continue ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. (cà dire la réciproque n'est pas vraie.)

Cette propriété ne caractérise pas les fonctions continues.

Si une fonction est continue dans un intervalle, elle y atteint sa limite supérieure et sa limite inférieure: c'est-à-dire qu'il y a dans l'intervalle 2 valeurs pour lesquelles on a: $f(x_1) = I_1$, $f(x_2) = I_2$.

Autre corollaire: Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont continues dans l'intervalle (a, b) et si: $f(a) < \varphi(a)$, $f(b) > \varphi(b)$, il y a une valeur intermédiaire c où: $f(c) = \varphi(c)$.

Énoncé vulgaire: Une fonction continue ne peut changer de signe sans passer par zéro.

En particulier, une fonction croissante dans un intervalle (a, b) atteint sa lim. inf. en a et sa lim. sup. en b .

Remarque. C'est là qu'une conséquence de cette théorie de la théorie des ensembles: Un ensemble borné et ^{compact} fermé contient ses limites supérieure et inférieure (puisque'il contient tous ses points-limites, l'ensemble est parfait).

Applications à l'Algèbre

On établit que les fonctions algébriques, et en particulier les fonctions entières (polynômes entières en x) sont continues.

Le 1^{er} théorème donne lieu au corollaire suivant:

Lorsque 2 nombres a, b substitués dans la fonction $f(x)$ donnent des résultats de signes contraires, l'éq: $f(x) = 0$ a au moins une racine comprise entre a et b .

C'est le principe de la séparation des racines, c'est-à-dire de la résolution numérique des équations.

Le 2^e théorème sert à démontrer le théorème fondamental de l'Algèbre: Toute équation algébrique a une racine (on se place dans l'ensemble des nombres complexes).

En effet, on prouve qu'une fonction entière de $z = x + iy$ a pour ^(la valeur absolue d') limite inférieure 0: c'est-à-dire que si on lui assigne un minimum non nul, on peut trouver une valeur inférieure.

Mais pour pouvoir affirmer que la fonction atteint cette limite inférieure (a effectivement pour minimum 0) il faut invoquer la continuité. Autrement, en effet, on pourrait imaginer ^(qu'elle prend) une suite de valeurs absolues indéfiniment décroissantes, ayant pour limite 0, sans pour cela ~~pu~~ ^{qu'elle prend} prendre cette valeur-limite.

Suivi le théorème fond de l'Algèbre, et par suite toute la théorie des équations, reposent sur un principe analytique des fonct. algébriques, sur la théorie des fonctions

22^e leçon

On a étudié (20^e leçon) les séries à termes constants :
 chacun d'eux est fixe et déterminé uniquement par
 son rang. On va maintenant étudier les séries à
termes variables, c'est-à-dire les termes sont fonctions
d'une ou plusieurs variables (les mêmes pour tous)
 et chacun a une même valeur en tous.) (1)
 En un mot, ce sont des séries de fonctions. On voit
 par là qu'on ne peut réduire des fonctions à des séries,
 puisque les termes des séries sont déjà des fonctions.
 Si l'on assigne aux variables une valeur déterminée,
 chaque terme prend une valeur fixe, et la série devient
 une série à termes constants, qui peut être convergente
 ou divergente. De même qu'une ^{variable} fonction représente
 une multitude (finie ou infinie) de valeurs constantes,
 de même une série à termes variables représente une
 multitude de séries à termes constants. Elle peut donc
 être convergente pour telle valeur et divergente pour telle autre.
 - Convergence uniforme. Considérons une série de fonctions
 qui converge pour toutes les valeurs d'un intervalle donné.
 Cela veut dire que, pour chaque valeur de cet intervalle,
 à ch. n , pos. ε correspond un nombre entier n tel que,
 pour tout $p > n$, on ait : $|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$.

(1) A un autre point de vue, on peut dire que dans une
 série à termes constants, le terme général u_n est une fonction
 du rang n , tandis que dans une série à termes variables, il
 est fonction à la fois de $x(y, z, \dots)$ et de n .

^{étant fixé,}
Crisien ne dit que ce nombre n soit le même pour toutes les valeurs de l'intervalle considéré: il peut être indéfiniment de cette sorte qu'on ne puisse lui assigner une limite supérieure. N° qui permette d'affirmer la ~~thèse~~ propriété précédente pour toute valeur de x .

On dit qu'une série de fonctions est uniformément convergente, ~~si dans un intervalle donné, si pour toute~~ ^{si dans un intervalle donné, si pour toute} valeur de cet intervalle, on peut à chaque n pos. & on peut faire correspondre un entier n tel que, pour tout $p > n$, on ait:

$$|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \epsilon$$

et cela pour toutes les valeurs appartenant à cet intervalle.

- Il peut arriver que tous les termes d'une série soient des fonctions continues ^{dans un intervalle}, sans que la somme de la série soit elle-même une fonction continue (Tannery).

Pour que cette hypothèse entraîne cette conclusion, il y a ^{dans le même intervalle} à ajouter ~~cette~~ condition de la convergence uniforme.

Théorème: Si une série dont les termes sont des fonctions continues de x dans un intervalle est, en outre, uniformément convergente dans cet intervalle, la somme de cette série est une fonction continue de x dans le même intervalle (Tannery, § 91.)

La réciproque n'est pas vraie: la somme de la série peut être une fonction continue dans l'intervalle, sans que la série soit uniformément convergente dans l'intervalle (Stolz).

- La convergence absolue se définit pour les séries de fonctions comme pour les séries à termes constants.

(1) N. B. C'est la définition la plus générale, celle de Darboux et de Dini, et non celle de M. Tannery d'après Weierstrass et Heine (v. note de la p. 133.)

Cette définition s'applique également aux séries à termes réels ou à termes complexes, en vertu du double sens (unique au fond) du mot: valeur absolue.

Les théorèmes précédents sont vrais pour toutes les séries de fonctions, quelle que soient ces fonctions. Par ex. pour les ~~fonctions~~ séries trigonométriques aussi bien que pour les séries de puissances. On y a donc pas de raison pour réduire les séries de fonctions à des séries de puissances, si ce n'est que celles-ci sont plus simples et plus commodes.

Les séries de puissances (terme allemand) ou séries entières (terme français) sont celles dont les termes sont constitués par les puissances entières positives de la variable, multipliés par des coefficients constants, et rangés par ordre d'exposant croissant. On ne peut en effet faire abstraction a priori de leur ordre: on ne le peut que dans le cas de convergence absolue. C'est dans ce cas seulement qu'on peut les assimiler à des polynômes (d'un nombre infini de termes, ou infinitésimaux.)

Sur les séries entières, deux théorèmes d'Abel:

I. Si pour $x = x_0$, tous les termes de la série entière:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

ont une valeur finie, c'est-à-dire si pour tout n on a:

$$|a_n x_0^n| < A,$$

la série est absolument convergente pour toute valeur de x dont la valeur absolue est inférieure à celle de x_0 .

(a fortiori, si la série est convergente pour $x = x_0$.)

Il y a une différence entre les 2 définitions: une série entière à plus. variables comprend aussi les produits de leurs divers puissances: $\sum x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots$

En outre, par conséquent, elle est abs. convergente à l'intérieur du cercle de rayon $|x_0|$. Cercle et rayon de convergence $= \underline{r}$.

En outre, elle est uniformément convergente dans tout domaine (ou intervalle) intérieur au cercle de convergence (dans tout intervalle dont les limites sont en valeur absolue inférieures à \underline{r})

II. Si pour $x = x_0$, la série entière est convergente, la série est absolument et uniformément convergente dans tout domaine intérieur au cercle de rayon $|x_0|$ et ayant pour point-limite (ou frontière) le point x_0 . (dans tout intervalle ayant pour limite le nombre x_0 et pour autre limite un nombre inf. en val. abs. à x_0)

Il en résulte que la somme $\sum a_n x^n$ est une fonction continue de x à l'intérieur du cercle de convergence, et qu'elle a pour limite $\sum a_n x_0^n$ quand x tend vers x_0 par des valeurs intérieures à ce cercle (et non par le contour).

Ainsi le rayon de convergence \underline{r} est la limite supérieure des valeurs absolues des valeurs qui rendent la série convergente. Le rayon peut ^{avoir} toutes les valeurs entre 0 et ∞ .

Exemples de séries convergentes dans tout le plan:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

Exemples de séries partout divergentes (sauf pour $x=0$)

$$1 + x + 2!x^2 + \dots + n!x^n + \dots$$

$$1 + x + 2^2x^2 + \dots + n^2x^n + \dots$$

Pour les points de la circonférence du cercle de convergence, on ne peut rien affirmer en général, même si l'on sait que la série est convergente en l'un d'eux (cas du 2^e théorème d'Abel.)

Exemples (Méray § 118): La série:

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots \quad \left(\begin{array}{l} \text{absolument convergente} \\ \text{pour } x = 1. \end{array} \right)$$

a pour rayon de convergence 1; elle converge sur tous les points de la circonférence (pour tout $|x| = 1$)

La série: $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$

a même rayon de convergence; elle converge en tous les points de la circonférence, sauf pour $x = +1$

La série: $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$

a même rayon de convergence; mais elle diverge en tous les points de la circonférence (où $|x| = 1$)

Application du 2^e théorème d'Abel:

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^n}{n} - \dots$$

pour $|x| < 1$. Or la série est encore convergente pour $x = 1$; ~~donc~~ ^{elle est} donc elle est une fonction continue pour $x = 1$. D'autre part, $\log(1+x)$ est aussi une fonction continue pour $x = 1$; donc les 2 fonctions sont égales en ce point, et l'on peut écrire:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Au contraire, de ce que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ est une f. continue de x pour $x = -1$, on n'a pas le droit de conclure: $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ parce que cette dernière série n'est pas convergente.

(Duhamel)

Principe des limites: méthode des limites (base du Calcul infinitésimal: théorie du infiniment petits.)

Ces principes n'ont plus qu'un intérêt historique depuis que le Calcul infinitésimal est fondé sur la définition rigoureuse de la limite.

(discontinue de valeurs)
On a défini la limite, d'abord pour une suite, puis pour une variable continue. On a démontré que:

$$\lim(u+v) = \lim u + \lim v \quad \lim(uv) = \lim u \cdot \lim v$$

Autrement dit (si u, v, w sont des variables convergentes ou const.)

$$\text{Si: } u+v=w, \quad \lim u + \lim v = \lim w \quad U+V=W$$

$$\text{Si: } uv=w, \quad \lim u \times \lim v = \lim w \quad UV=W$$

Conclusion de la 1^{re} relation (entre variables) à la 2^e (entre valeurs constantes qui sont leurs limites respectives) c'est le fameux passage à la limite, tant contesté.

Plus généralement, si F désigne une fonction continue ^{entière} (donc

$$\lim F(u, v, w, \dots) = F(\lim u, \lim v, \lim w, \dots)$$

$$\text{D'où ce théorème: } (= F(\lim u, \lim v, \lim w, \dots))$$

Si des variables sont continues, toute relation entière entre ces variables subsiste entre leurs limites.

— Définition: On appelle infiniment petite une variable qui a pour limite 0 (qui décroît indéfiniment)

Donc, en particulier, si l'on a: $u = v + \varepsilon$

$$\lim u = \lim v + \lim \varepsilon = \lim v + 0 = \lim v \quad (v = \text{fixe})$$

Ainsi, si 2 variables ont une différence inf. petite, leurs limites sont rigoureusement égales (puisque elles sont fixes).
C'est ce que signifie cet énoncé vulgaire, mais inexact.

Une constante inf. petite est identiquement nulle.
Cela veut dire que si la différence de 2 quantités fixes

l'on peut prouver que

doit être plus petite que toute quantité donnée elle doit être identiquement nulle +

Dans le passage à la limite, c-à-d dans la substitution des limites aux variables, on peut et on doit même négliger les infiniment petits; ^{on peut donc} et remplacer une variable par une autre qui en diffère infiniment peu. Il n'y a là aucune inexactitude, aucune équation imparfaite, aucune compensation d'erreurs (Carnot) mais un procédé absolument rigoureux, précis et sûr, du moment que l'on cherche à déduire de la relation qui existe entre les variables celle qui existe entre leurs limites.

+ Si le rapport de 2 grandeurs variables a pour limite 1, leur différence a pour limite 0, et réciproquement.

$$\text{Si: } u = v + \varepsilon, \quad \frac{u}{v} = 1 + \frac{\varepsilon}{v} \quad \lim \frac{u}{v} = 1.$$

$$\text{Si: } \lim \frac{u}{v} = 1, \quad \frac{u}{v} = 1 + \varepsilon, \quad u = v + v\varepsilon \\ \lim u = \lim v.$$

Infiniment petits de divers ordres.

Soient u, v deux inf. petits: ils sont de même ordre

$$\text{Si: } \lim \frac{u}{v} = k \quad (\text{nombre fini})$$

u est d'ordre supérieur à v (inf. petit par rapport à v)

$$\text{Si: } \lim \frac{u}{v} = 0 \quad (\text{ou si: } \lim \frac{v}{u} = \infty)$$

On choisit arbitrairement l'infiniment petit d'un ^{er} ordre (c'est généralement la variable indépendante x) On dit qu'une variable (fonction) y est un inf. petit de n^{e} ordre si l'on a:

$$\lim \frac{y}{x^n} = k \quad (\text{nombre fini})$$

quel que soit le nombre réel positif n

On a par définition : $\frac{y}{kx^n} = 1 + \varepsilon$
 ε étant infiniment petit. Donc :

$$y = kx^n + \varepsilon \cdot kx^n$$

εkx^n étant inf. petit par rapport à kx^n , on appelle kx^n la partie principale de l'inf. petit y . Quand on passe aux limites, on peut remplacer un inf. petit par sa partie principale.

Les infiniment grands sont les inverses des inf. petits d'ordre correspondant (1)

Non-seulement il y a des inf. petits de tous les ordres réels (rationnels et irrationnels), mais il y en a d'ordres intermédiaires (voir Du Bois-Reymond)

Si $y = \frac{x^n}{\log x}$, $\lim \frac{y}{x^n} = \lim \frac{1}{\log x} = 0$,

Si $y = x^n \log x$, $\lim \frac{y}{x^n} = \lim \log x = \infty$.

D'autre part, $x^\varepsilon \log x$ est inf. petit, si petit que soit $\varepsilon > 0$; de sorte que : $\lim \frac{y}{x^{n-\varepsilon}} = 0$, $\lim \frac{y}{x^{n+\varepsilon}} = \infty$.

Le même, il y a des infiniment grands d'ordre infini :

e^x est inf. grand par rapport à x^n , quelque soit n .
 Et des inf. petits d'ordre infini, comme $e^{-\frac{1}{x}}$

— La somme de plusieurs inf. petits est un inf. petit d'ordre le moins élevé de tous.

Le produit de plusieurs inf. petits a pour ordre la somme des ordres des facteurs.

(1) On peut les considérer comme des infiniment petits d'ordre négatif, par la convention des exposants négatifs.

23^e leçon

On a intérêt à étudier la variation des fonctions; on conçoit qu'une fonction (d'une variable réelle) varie plus ou moins vite qu'une autre, c'est-à-dire qu'elle éprouve une plus grande variation pour une même variation de la variable indépendante. La vitesse de variation d'une fonction est donc une grandeur variable, elle aussi, et qu'il importe de déterminer en fonction de la variable indépendante. Cette notion de vitesse n'implique pas le temps; mais on peut se figurer sans le temps, en imaginant que la variable indépendante varie uniformément dans le temps (c'est-à-dire de quantités égales en des temps égaux, ou de quantités proportionnelles au temps) et en cherchant comment la vitesse de la fonction varie simultanément (fluxion de Newton.)

[Remarque Il y a là une sorte de cercle vicieux, à la rigueur, puisque l'on attribue à la variable indep. une vitesse uniforme, c'est-à-dire une fluxion constante.

Il vaut donc mieux rapporter directement la fonction à sa variable, sans l'intermédiaire du temps.]

Soit x la variable, y la fonction: la dépendance de l'une à l'autre s'exprime par: $y = f(x)$.

On désigne les valeurs correspondantes par le même indice.

Pour comparer les accroissements correspondants, c'est-à-dire étudier la variation de la fonction, on se considère le rapport:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Ce rapport est la vitesse moyenne de variation de la fonction dans l'intervalle (x_0, x_1) . Plus cet intervalle est petit, plus la vitesse moyenne se rapproche de la vitesse vraie; on est ainsi amené à concevoir la vitesse à chaque instant ou en chaque point, c'est-à-dire pour chaque valeur x_0 de x . Cette valeur sera la limite du rapport $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, quand x_1 tend d'une manière continue vers x_0 .

Cette limite, s'elle existe, est la dérivée de $f(x)$ au point (pour la valeur) x_0 . On représente les accrois-

Définition: dénotés par $\Delta x, \Delta y$: $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

On représente aussi Δx par h : $x_1 = x_0 + h$;

$y_0 = f(x_0)$ $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$: le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ devient: $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Définition précise et rigoureuse: h

Une fonction $f(x)$ définie pour la valeur dans un intervalle continu qui contient x_0 a une dérivée pour x_0 , si à chaque nombre pos. ε correspond un autre n. pos. η , tel que pour la condition:

$$0 < |h| < \eta,$$

on ait:

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - X \right| < \varepsilon.$$

Cette dérivée se désigne par $y'_0 = f'(x_0)$; ou par:

$D_x f(x)$ - On encore par: $\frac{dy}{dx}$, symbole qui rappelle $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Toutes les difficultés & les paradoxes du Calcul infinitésimal viennent de cette notation, on s'est demandé comment le rapport de 2 quantités

nuller peut être une quantité déterminée. Il suffit de dire que $\frac{dy}{dx}$ n'est pas un rapport, mais la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bien déterminée, puis que Δx et Δy sont différents de zéro. Ce sont des inf. petits dans le sens qu'ils ont pour limite zéro, et non des inf. petits actuels ou fixes, ce qui est absurde. (1)

~~La définition de la dérivée~~ Pour que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ait une limite, il faut évidemment que Δy et Δx aient pour limite 0; mais cela n'est pas. En d'autres termes, Pour que la fonction ait une dérivée $f'(x_0)$, il faut qu'elle soit continue pour x_0 ; mais cela n'est pas. Une fonction qui a une dérivée est nécessairement continue, mais une fonction continue peut n'en avoir pas de dérivée. +

La dérivée $f'(x_0)$ peut exister et être définie pour un ensemble de valeurs de x , fini ou infini, discontinu ou continu. C'est une nouvelle fonction de x : elle est toujours contenue dans l'ensemble où $f(x)$ est définie, peut être continue, et même avoir une dérivée: $f''(x)$, qui sera la dérivée seconde de $f(x)$. Et ainsi de suite. Mais à chaque dérivation, l'ensemble des valeurs de x où la dérivée est définie peut diminuer; la chaque dérivée peut cesser d'être continue, à plus forte raison de avoir une dérivée.

(1) Ce qui permet de traiter $\frac{dy}{dx}$ comme un rapport, c'est que la fonction inverse a pour dérivée $\frac{1}{f'(x)} = \frac{dx}{dy}$.

Par exemple, une fonction constante dans un intervalle a une dérivée nulle dans cet intervalle: car $\Delta y = 0$.
 Une fonction constante dans tout intervalle a une dérivée constamment nulle. Or une dérivée constamment nulle n'a pas de dérivée (sa dérivée est constamment nulle).

C'est ce qui arrive aux fonctions entières: un polynôme de degré n a n dérivées non nulles; la n^{e} est constante donc la $(n+1)^{\text{e}}$ est nulle.

Soit $f(x)$ un polynôme de degré n ; si l'on donne à x l'accroissement h , on peut développer chaque terme $(x+h)^k$ suivant la formule du binôme, et ordonner suivant les puissances de h (la variable); les coefficients seront des polynômes en x_0 :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f_1(x_0) \frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} f_2(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f_n(x_0)$$

On en tire conclut:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f_1(x_0) + \frac{h}{2!} f_2(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!} f_n(x_0)$$

Les 2 membres étant des fonctions continues de h ont même limite pour $h=0$: or le 1^{er} a pour lim. $f_1(x_0)$ le 2^e a pour lim. $f_1(x_0)$; donc $f_1(x_0) = f'(x_0)$

Le même raisonnement fait que $f_2(x_0) = f''(x_0)$.
~~Le même raisonnement fait que~~
 ~~$f_3(x_0)$ a des dérivées d'ordre supérieur, on~~
~~peut démontrer que (Stolz, III, 4):~~
 $f_n(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

Si $f(x)$ est une série entière en x , (convergente absolument pour tout $|x| < a$), on pourra la développer, par la même méthode, en série entière en h , pour tout $|h| < a - |x_0|$, chaque coefficient de h étant une série entière abs. convergente dans le même cercle que $f(x)$. La série entière en h est

En particulier, la dérivée de x^n est le coefficient de h dans le développement du binôme $(x+h)^n$, soit: nx^{n-1} .

par suite, une fonction continue de la variable h ;
on démontre, comme plus haut, que :

$$f_1(x_0) = f'(x_0), \dots \dots \dots f_n(x_0) = f^{(n)}(x_0), \dots$$

Mais il faut bien remarquer que cette identification suppose préalablement définies les dérivées successives de $f(x)$; elle ne peut donc leur servir de définition.

De plus, elle suppose que la fonction est définie par une série, ou développable en série dans un cercle de convergence. Or si une fonction est définie par une série, elle a des dérivées (qui sont des séries ayant même cercle de convergence). Mais la réciproque n'est pas vraie : une fonction peut avoir une ou plusieurs dérivées, ou même une infinité, sans être développable en série. On ne peut donc pas définir d'une manière générale les dérivées de $f(x)$ comme les coefficients des puissances de h dans le développement de $f(x+h)$.

C'est ce qui prouve la théorie de la série de Taylor :
Si une fonction $f(x)$ est continue, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, dans ^{tout} l'intervalle (a, b) , et si sa n^e dérivée existe ~~pour~~ à l'intérieur de cet intervalle, on peut écrire :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \\ + \frac{h^n}{n!} f^n(x+\theta h)$$

et $(x+h)$ appartenant à l'intervalle (a, b) , et θ étant un nombre réel compris entre 0 et 1.

Le dernier terme s'appelle terme complémentaire
ou reste de la série : on le désignera par R_n (~~72~~).
Si les conditions énoncées sont vérifiées quel que soit
 n (cà d si $f(x)$ a des dérivées finies et continues de
tout ordre) la série pourra être prolongée indéfiniment:
ou elle est toujours égale à : $f(x+h) - R_n$.

Donc, pour qu'elle soit convergente, il faut et il suffit
que R_n ait une limite finie pour n infini.

Mais pour qu'elle ait pour limite $f(x+h)$ il faut et
il suffit que R_n ait pour limite 0. Cette condition
est évidemment plus restrictive que la précédente.

Ainsi, non seulement une fonction peut être continue
mais elle peut avoir toutes ses dérivées finies et continues
pour $x=a$ sans pour cela être développable en série
suivant les puissances de $(x-a)$, si voisin que x soit de
Cauchy a remarqué (le premier) que la série de Taylor
peut être convergente dans tout un intervalle contenant
la valeur $(x+h)$, sans avoir pour limite $f(x+h)$.

Exemple: la fonction : $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (v. Stolz, III, 8)

Aussi, de ce qu'on peut développer $f(x+h)$ en série
de puissances de h , on ne peut pas conclure que les
coefficients du développement sont les dérivées de $f(x)$.
Il faut savoir ~~de l'abord~~ au préalable que la fonction a
toutes ses dérivées finies et continues. Alors, mais
alors seulement en vertu de l'unicité du développement
en série, on peut identifier les coefficients correspondants
(v. Stolz, III, 4.)

Autrement, on ne peut faire l'identification que pour le 1^{er} coefficient, qui est toujours égal à la dérivée première, comme on l'a démontré précédemment. Mais si l'on a pu déterminer les dérivées d'une fonction entière ou d'une série entière au moyen du développement suivant les puissances de h , c'est parce qu'on savait d'avance que les dérivées existaient.

En résumé, on ne peut pas définir d'une manière générale les dérivées de $f(x)$ comme les coefficients de $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ dans le développement de $f(x+h)$ en puissances de h .

Conditions nécessaires et suffisantes pour que la série de Taylor ait pour somme la fonction génératrice (1)

- 1° La fonction $f(x)$ doit être finie et continue ainsi que ses dérivées de tout ordre pour $|x-a| \leq R$
- 2° La série de Taylor doit être convergente pour toute valeur de x telle que $|x-a| < R$ et pour toute valeur de h telle que $|h| < R - |x-a|$.
- 3° La série, considérée comme fonction de x (h const.) doit être continue et différentiable par termes, dans tous les cas où : $|x-a| + |h| < R$.
- 4° La somme de la série et sa dérivée partielle par rapport à x (ou par rapp. à h) doivent être des fonctions continues de x et de h pour toutes les valeurs qui satisfont l'inégalité : $|x-a| + |h| < R$.

(1) König, ap. Stolz, III, 8.

Théorème de Cauchy (pour les variables complexes):
 Si la fonction $f(x)$ est uniforme et continue dans
 le cercle de centre a et de rayon R . Si la fraction:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

où x est un point quelconque intérieur au cercle
 de ~~rayon~~ ^{centre} x_0 et de rayon $\delta < R - |x_0|$, a pour
 limite ($f'(x_0)$) pour $\lim x = x_0$; et si la fonction $f(x)$
 est continue dans le intérieur du 1^{er} cercle, $f(x)$ est
 développable en série de Taylor suivant les puissances
 de $(x-a)$ à l'intérieur du même cercle, c'est-à-dire que
 pour tout $|x-a| < R$, on a:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

+ Exemples de fonctions continues sans dérivée:

1° $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ pour $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin \frac{\pi}{x} \quad \text{a pour } \lim x = 0 \text{ les limites}$$

d'indétermination $+1, -1$.

2° $f(x) = \sin \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{x}}$ Les racines de $\sin \frac{\pi}{x}$ sont: $x = \frac{1}{n}$.

On pose: $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{n}) = 0$.

f est uniforme et continue ~~sur~~ ^{aux points} dans tout intervalle $(0, \frac{1}{n})$
 et pourtant n'a pas de dérivée aux points 0 et $\frac{1}{n}$.

3° Weierstrass a trouvé une fonction uniforme et continue
 qui n'a de dérivée pour aucune valeur de l'argument

$$\sum a^n \cos(b^n \pi x) \quad 0 < a < 1, \quad b \text{ nombre impair}$$

Pourvu que $ab > 1 + \frac{3}{2} \pi$.
 Par suite, cette fonction n'est pas développable en série
 en un seul point.

24^e leçon

Une fonction représentant une loi de variation, sa dérivée représente la vitesse de variation, en chaque point, et la fonction dérivée représente la loi suivant laquelle varie cette vitesse. On peut se poser le problème inverse: Étant donnée la vitesse de variation en chaque point, reconstituer la loi de variation; en particulier, étant donnée la vitesse d'un mobile à chaque instant, trouver son mouvement. C'est le problème inverse de celui du calcul des dérivées: trouver la fonction primitive d'une fonction donnée, c'est d'ailleurs celle dont elle ^{peut être} la dérivée. C'est ce qu'on appelle intégrer une fonction.

Toute fonction ne peut pas être considérée comme la dérivée d'une autre; toute fonction n'est pas intégrable. Il s'agit de trouver les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégrabilité d'une fonction. — Pour se faire une idée approximative et grossière de la ballure de la fonction primitive cherchée ou supposée, on peut employer les mêmes considérations qui ont amené à la ^{définition} ~~description~~ de la dérivée. Celle-ci a été conçue comme $\lim_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

En vertu du théorème des accroissements finis, si $f'(x)$ existe dans l'intervalle $(x, x+h)$, on peut écrire:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h) \quad 0 < \theta < 1.$$

c'est-à-dire que le rapport de l'accroissement fin de la fonction

l'accroissement fin de la variable est égal à une des valeurs que prend $f'(x)$ dans l'intervalle (x_0, x_0+h) .

Or, à présent, nous connaissons seulement $f'(x)$, et nous voulons connaître l'accroissement fin de la fonction primitive. ~~Supposons provisoirement~~

Supposons provisoirement que la fonction donnée $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) . On sait que (autre form.): $f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi)$ $a < \xi < b$.

Si l'on connaissait ξ , on aurait exactement: $f(b) - f(a)$.

Si l'on prend une autre valeur de $f'(x)$, elle diffère d'autant moins de $f'(\xi)$ que x diffère moins de ξ , c'est-à-dire est ^{indistinctement} ~~équivalente~~ dans un plus petit intervalle. On

divisera donc l'intervalle (a, b) en n autres par les valeurs: a_1, a_2, \dots, a_{n-1} ($a = a_0, b = a_n$).

On prendra dans chacune d'eux une valeur de $f'(x)$ ad libitum, soit: f'_1, f'_2, \dots, f'_n .

et l'on formera la somme:

$$(a_1 - a_0) f'_1 + (a_2 - a_1) f'_2 + \dots + (a_n - a_{n-1}) f'_n.$$

La 1^{re} terme diffère peu de $f(a_1) - f(a_0)$:

le 2^e — — — — — $f(a_2) - f(a_1)$;

le n^{e} — — — — — $f(a_n) - f(a_{n-1})$.

Donc la somme représentera approximativement la différence: $f(b) - f(a)$.

En d'autres termes, en prenant des intervalles (de temps) de plus en plus courts, la vitesse à un instant quelconque de chaque intervalle approche de plus en plus de la vitesse

(1) Remarque: $f'(x_0 + \theta h)$ est la vitesse moyenne dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$ de étendue h , elle correspond à une valeur intermédiaire de cet intervalle.

moyenne dans cet intervalle, et par suite, le produit de cette vitesse par la longueur de l'intervalle est d'autant plus voisin de l'espace parcouru, de la variation réelle de la fonction primitive.

On conçoit donc que si cette f. primitive existe, la somme $\sum (a_k - a_{k-1}) f'_k$ doit avoir une limite, quand les intervalles décroissent indéfiniment, et que cette limite doit être la variation $f(b) - f(a)$.

D'où la définition de l'intégrale définie:

Une fonction $f(x)$, finie (non continue) dans l'intervalle (a, b) , est intégrable dans cet intervalle, si, quand on partage l'intervalle en intervalles partiels

$(a, a_1) (a_1, a_2) \dots (a_{n-1}, b)$

détendre infiniment petite, et qu'on prend dans chacun d'eux une valeur quelconque de $f(x)$:

la somme $\sum (a_k - a_{k-1}) f_k$ a une limite J .

Plus précisément: Si à chaque nombre positif ε correspond un nombre pos. η , tel que la ^{différence} ~~différence~~

$|\sum (a_k - a_{k-1}) f_k - J|$ soit plus petite que ε , pourvu que tous les intervalles soient plus petits que η .

(Leur somme restant toujours égale à $b - a$)

La limite J ainsi définie s'appelle l'intégrale définie de $f(x)$ entre les limites (bornes) a et b .

Si cette limite existe, on l'obtiendra en particulier en prenant tous les intervalles égaux à Δx ^{en ayant soin de transformer}

$$\text{Somme: } f(x)\Delta x + f(x+\Delta x)\Delta x + \dots + f(x+(n-1)\Delta x)\Delta x$$

$$\text{ou: } \Delta x [f(x) + f(x+\Delta x) + \dots + f(x+(n-1)\Delta x)]$$

Pour rappeler l'origine de l'intégrale, à savoir une somme de termes obtenus en multipliant chaque ~~intervalle~~ ^{accroissement} dx de la variable par la valeur corresp. de la fonction, on l'écrit :

$$\int f(x) dx$$

Reste à trouver la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale définie existe. On en donne plusieurs énoncés équivalents, mais plus simples les uns que les autres ~~est~~ ^{les uns} impliquant les premiers.

7. ~~Pour que la fonction~~ ^{soit intégrable} Pour que la limite I existe, il faut ~~et il suffit~~ ^{il suffit} que si l'on décompose de deux manières différentes l'intervalle (a, b) en intervalles partiels tous inférieurs à η , la différence entre les deux sommes correspondantes soit moindre que ε . On démontre que cette condition est suffisante : donc.

I. Pour que la fonction soit intégrable, il faut et il suffit qu'à ch. n pos. ε corresponde un n pos. η tel que la différence entre deux sommes relatives à 2 modes de décomposition soit plus petite que ε pourvu que dans les 2 modes les intervalles partiels soient tous plus petits que η .

Remarque. C'est ici, comme partout, la condition de convergence substituée à l'existence de la limite, et équivalent logiquement à celle-ci.

— La somme $\sum (a_k - a_{k-1}) f_k$ est indéterminée dans une certaine mesure, puisqu'à f_k est une valeur quelconque de f dans l'intervalle (a_{k-1}, a_k) . Soit m_k la limite inférieure (le minimum) de $f(x)$ dans cet intervalle, M_k la limite supérieure (son maximum). On a évidemment

$$\sum (a_k - a_{k-1}) m_k < \sum (a_k - a_{k-1}) f_k < \sum (a_k - a_{k-1}) M_k$$

(à fortiori : $(b-a)m < \sum (a_k - a_{k-1}) f_k < (b-a)M$
 m et M étant les lim. inf. et sup. de f dans l'intervalle)

Pour, pour abréger: $\sum (a_k - a_{k-1}) m_k = s$,
 (pour un certain mod. de décomposition.) $\sum (a_k - a_{k-1}) M_k = S$.
 (somme inférieure) (somme supérieure)

Toutes les sommes possibles, pour un même mod. de décomposition, sont comprises entre S et s ; par conséquent, il faut que $S - s$ soit plus petit que ϵ . On démontre que la condition est suffisante. Donc:

II. Pour que la fonction soit intégrable, il faut et il suffit qu'à chaque n , pos. ϵ corresponde un n pos. η tel que, pour tout mode de décomposition où les intervalles partiels sont tous $< \eta$, on ait: $S - s < \epsilon$.

Remarque. Cette condition est plus simple que la 1^{re}, car on n'y considère qu'un mode de décomposition à la fois, au lieu d'avoir à en comparer deux.

On peut encore la réduire et la simplifier:

III. Pour que la fonction soit intégrable, il faut et il suffit qu'à chaque n , pos. ϵ corresponde un certain mode de décomposition tel que $S - s < \epsilon$.

On n'a plus qu'à considérer qu'un seul mode, au lieu d'une infinité simple comme dans II, et d'une infinité double comme dans III.

Cette dernière forme de la condition est due à Riemann. De cette 3^e forme (ou de la 2^e) on déduit les deux théorèmes suivants:

Une fonction continue ds un int. est intégrable ds cet int.

Une fonction croissante ds un int. est intégrable ds cet int.

Remarque que la continuité est une condition suffisante, mais non nécessaire, de intégrabilité.

On s'en rendra compte aisément.

Posons: $\delta_k = M_k - m_k$

c'est l'oscillation de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a_{k-1}, a_k) . $S - s = \sum (a_k - a_{k-1}) \delta_k$.

Or, si la fonction est continue dans l'intervalle (a, b) , son oscillation dans chaque intervalle inférieur à η sera plus petite que ε ; donc: $S - s < \sum (a_k - a_{k-1}) \varepsilon = (b - a) \varepsilon$. $(b - a)$ étant fini et fixe, $S - s$ tend vers 0 comme ε .

D'autre part, pour que la condition (III) soit remplie, il faut et il suffit que $(S - s)$ ait pour limite 0 quand η décroît indéfiniment; c'est-à-dire que:

$$\lim \sum (a_k - a_{k-1}) \delta_k = 0$$

Or, pour cela, il n'est pas nécessaire que l'oscillation δ_k décroisse indéfiniment dans tous les intervalles, puisque leur étendue à chacun décroît aussi indéfiniment; il suffit que l'étendue totale de ceux où l'oscillation δ_k reste finie décroisse elle-même indéfiniment (ait pour limite 0) et cela, en vertu de (III) pour un seul mode de décomposition particulier. Donc:

IV Pour que la fonction soit intégrable, il faut et il suffit qu'à chaque couple de η pos. ε et α , corresponde un certain mode de décomposition tel que l'ensemble des intervalles où l'oscillation est au moins égale à ε soit ait une étendue inférieure à α .

Ainsi la fonction $f(x)$ peut être discontinue sans cesser d'être intégrable, pourvu que les intervalles où se produisent ces discontinuités aient une étendue inf. petite.

Par exemple, elle peut être discontinue pour un nombre fini de valeurs de x , et même pour un ensemble infini d'extremes nulle.

Théorème de M. Darboux: Les sommes inf. et sup. tendent toujours vers une limite déterminée, quand tous les intervalles ^{chacun} tendent vers 0.

La condition précédente: $\lim (S - s) = 0$,
équivalant donc à celle-ci: $\lim S = \lim s$.

Ces limites s'appellent resp. l'intégrale par excès et l'intégrale par défaut de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) . Elles existent pour toute fonction finie de l'intervalle. D'où une nouvelle forme de la condition:

V. Pour que la fonction soit intégrable, il faut et il suffit que ses intégrales par défaut et par excès soient égales: $\lim \sum (a_k - a_{k-1}) M_k = \lim \sum (a_k - a_{k-1}) m_k$.

L'intégrale définie:

$$\int_a^b f(x) dx$$

est une grandeur fixe, représentée par un nombre constant. Elle dépend, d'abord de la fonction intégrée, ensuite de deux limites (bornes) de l'intégration, a, b . Si à b on substitue la variable x , la grandeur variable:

$$\int_a^x f(x) dx$$

est une fonction, sera définie dans tout l'intervalle (a, b) . Pour $x = a$, on la suppose nulle. Pour ne pas confondre la variable x dont elle dépend avec la variable de l'intégration qui figure dans $f(x) dx$, on désignera celle-ci par ξ . Ainsi:

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi.$$

Cette fonction F est finie et continue dans l'intervalle (a, b) . En effet, 1^o elle est comprise entre $m(x-a)$ et $M(x-a)$, M et m étant les lim. sup et inf. de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) .

$$2^o \quad F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi) d\xi < Mh$$

qui tend vers 0 avec h .

Enfin, si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) , elle est la dérivée de $F(x)$ dans cet intervalle. Car:

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi) d\xi.$$

Or: $m' < \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi) d\xi < M'$

D'autre part: $m' < f(x_0) < M'$

Mais, si $f(x)$ est continue, ses lim. sup et inf. M', m' dans l'intervalle $(x, x+h)$ ~~tendent vers~~ ^{ont une différence qui tend} vers 0 avec h (son oscillation est infinitésimale).

Par conséquent, les 2 grandeurs $f(x_0)$ et $\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi) d\xi$

~~ont une différence~~ ^{diffèrent} $\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi) d\xi - f(x_0)$ tend vers 0 avec h ;

donc: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi) d\xi = f(x_0)$

cà d: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$

c'est la définition de la dérivée: $F'(x_0) = f(x_0)$

Ainsi la fonction primitive de la fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle (a, b) est l'intégrale définie:

$$\int_a^x f(\xi) d\xi$$

qui est une fonction finie et continue de la lim. sup. x dans le même intervalle.

C'est une fonction primitive. Est-ce la seule?
Toute fonction $\Phi(x)$ qui a pour dérivée $f(x)$ ne peut
différer de $F(x)$ que par une constante. En effet,
la fonction $\Phi(x) - F(x)$ a sa dérivée constamment
nulle; donc elle est constante, et l'on a.

$$\Phi(x) = F(x) + C^{\text{te}}$$

~~Inversement~~ Réciproquement si $\Phi(x) = F(x) + C^{\text{te}}$,
 $\Phi'(x) = F'(x)$, la dérivée de C^{te} étant nulle.
Donc toute fonction qui a pour dérivée $f(x)$ est
de la forme: $\int_a^x f(\xi) d\xi + C^{\text{te}}$

et pour avoir toutes les fonctions primitives de $f(x)$,
il suffit de donner à la C^{te} toutes les valeurs possibles.

Mais si l'on a: $\Phi(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi + C$,
on doit avoir, pour $x = a$: $\Phi(a) = C$.

Donc: $\int_a^x f(\xi) d\xi = \Phi(x) - \Phi(a)$.

Ainsi, pour évaluer une intégrale définie, il suffit
de connaître une fonction primitive Φ de $f(x)$,
et de prendre la différence de ses valeurs pour la
limite sup. et pr la lim. inf. de l'intégrale.

Il va sans dire que cette différence est la même pour
toutes les fonctions primitives, puisqu'elles ne diffè-
rent que par des constantes qui disparaissent dans
la soustraction.

L'invention d'une fonction primitive de $f(x)$ s'appelle
intégration indéfinie; et cette fonction s'appelle intégrale
indéfinie de $f(x)$ et s'écrit: $\int f(x) dx$
sans limites.

C'est qu'en effet elle n'est déterminée qu'à une constante près, constante qui correspond au choix de la lim. inférieure, à partir de laquelle on intègre. La lim. supérieure, sous-entendue, est la variable x . En somme, l'intégrale indéfinie est l'intégrale définie \int_a^x dont la lim. sup. est variable, et la lim. inf. fixe, mais arbitraire et indéterminée.

— On a tourné dans une sorte de cercle; on a défini la fonction primitive de $f(x)$ au moyen de l'intégrale définie; et l'on détermine l'intégrale définie au moyen de l'intégrale indéfinie. C'est pas un cercle vicieux, car dans le 1^{er} cas il s'agit de définir théoriquement la fonction primitive, ou plutôt ses conditions d'existence; et dans le 2^e cas, de l'évaluer pratiquement. Or, sauf quelques cas exceptionnels, il est impossible d'évaluer directement la limite ^{de l'intégrale définie} comme limite d'une somme ^{de termes inf. petits}; on est obligé de recourir par un détour à l'intégrale indéfinie, parce que l'on connaît, par des règles générales de la dérivation, les fonctions primitives des fonctions usuelles (auxquelles on s'efforce de ramener les autres). Mais il peut arriver que les fonctions primitives de certaines fonctions communes soient des fonctions inconnues, inexprimables ^{algébriques} algébriquement (fonctions elliptiques par ex.).

Quon le calcul intégral est-il l'origine d'une foule de fonctions en général transcendentes, ce qui prouve bien que les fonctions algébriques ne sont pas l'élément essentiel de l'Analyse, et que le caractère d'algébrique est en somme secondaire et accidentel dans la th. des fonctions.

25^e leçon

Conclusions. Sujet du cours est de déterminer les relations des idées de nombre, d'ordre et de grandeur au moyen de l'étude des sciences fondées sur ces idées.

Les mathématiciens modernes ~~sont~~ prétendent que l'idée de nombre est le unique base du Math. purs. Pour cela, ils sont obligés de recourir à la généralisation arithmétique ou algébrique du nombre. Or, d'une part, la création du nombre irrationnel ne se justifie que par la considération de la continuité, donc de la grandeur; d'autre part, la généralisation algébrique n'aboutit qu'à l'ensemble des nombres algébriques, qui n'est pas continu. De toute façon, il est donc impossible de construire le continu avec des nombres.

D'ailleurs, même en admettant que ce fût possible, cette construction ne reposerait pas sur la seule idée de nombre, mais aussi sur l'idée d'ordre. En effet, pour construire le continu univoque, il ne suffit pas d'avoir un ensemble de nombres (reels); il faut encore les ranger dans un ~~certain~~ ordre déterminé, ^{pour} intercaler les nombres irrationnels parmi les nombres rationnels.

Or cet ordre est étranger aux considérations du Alg. purs. Surtout, quel est-il y a peu de continuité.

M. Molk dit: « L'idée de continuité qu'on attribue doit nous être d'autant plus étrangère, que nous grouperons les nombres, non d'après leur grandeur, mais d'après leurs propriétés algébriques, » à savoir autant qu'ils vérifient la même équation.

Ainsi la construction du continu numérique fait
appel au moins à l'idée d'ordre. Mais quel est le
substratum de cet ordre? Pour ranger les nombres,
il faut les placer quelque part. Il faut un support intuitif
pour cet ordre, et ce support ne peut être que continu;
il semble bien que ce soit la grandeur. D'ailleurs,
l'idée de grandeur se trouve impliquée déjà dans ce
projet, de ranger les nombres par ordre de grandeur.
Donc la construction du continu numérique invoque
les idées de l'ordre et de grandeur.

— Le nombre lui-même, le pur, à l'entendre, exige
un contenu ou un support intuitif. En effet, on a vu
que les premières vérités arithmétiques sont synthétiques,
donc intuitives. Par ex. $2+1=3$, $3+1=4$, etc.
Sont des synthèses primitives. La constitution du nombre
est une synthèse réunissant plusieurs unités dans une
idée. Or, pour multiplier ainsi l'unité, l'extérieure se
par rapport à elle-même, et faut s'attacher à une
matière; l'appliquer à une diversité, ou l'on puise
distinguer plusieurs unités. Quelle est cette diversité?

Ce n'est pas l'espace: car on peut dénombrer des
choses indéterminées, des objets idéaux et moraux (par ex.
les 3 idées de n. d'o. et de g. dont nous nous occupons.)

Ce n'est pas non plus le temps (Kant), bien que toute
pensée soit soumise au temps comme forme de toute
la sensibilité consciente (sens interne et externe.) En effet,
1° la succession n'est pas nécessaire au dénombrement:
on dénombre d'un coup d'œil les collections peu nombreuses.

2° Le dénombrement, même successif, ne fait pas entrer la notion de temps dans le nombre: car le nombre est le résultat de la synthèse simultanée qui résume le dénombrement. 3° Enfin le nombre est en soi indépendant du dénombrement du mode employé: le temps peut être une condition ^{temporelle} du dénombrement (comme de toute opération mentale: raisonnement) sans être impliqué dans le nombre.

La seule condition intuitive du nombre est donc une multiplicité homogène et purement intelligible, qui serve de matière aux unités constitutives.

D'autre part, il est indépendant de l'idée d'ordre: il n'implique aucun ordre entre les unités, et le dénombrement non plus n'exige pas un ordre. (C'est la raison véritable de l'indépendance du nombre cardinal)

II Mais l'idée d'ordre exige aussi le même substratum. En effet, l'idée d'ordre, comme celle de nombre implique ~~des~~ l'unités, et même une pluralité d'unités; elle implique donc le nombre. Mais elle représente une autre face de la collection. Le nombre est plus abstrait que l'ordre: car on y fait abstraction ^{cardinal} de l'ordre, tandis que dans l'ordre on ne peut faire abstraction du nombre (1). L'idée d'ordre n'implique par nécessairement l'espace (on peut ordonner des choses inétendues et étrangères à l'espace, des idées) ni le temps, bien qu'il y ait la succession soit un certain ordre et pour ainsi dire le prototype de l'ordre. On distingue (1) Mais elle en diffère, puisque une même collection n'a qu'un seul nombre, et comporte plusieurs ordres. Deux permutations diffèrent par l'ordre, et non par le nombre.

en effet un ordre même dans les objets simultanés.
Et puis, on conçoit l'ordre circulaire, ~~tantôt~~ ^{ou périodique},
tandis que le temps est un ordre linéaire indéfini.
L'ordre est réversible (une permutation est la même,
qu'on l'énumère par un bout ou par l'autre),
tandis que le temps est irréversible. Il semble que
l'ordre soit plutôt spatial, quand on le compare au
temps, et plutôt temporel, quand on le compare à
l'espace. En réalité, l'ordre est ~~éternel~~ ^{immanent} au temps &
à l'espace, et il les dépasse; par conséquent, si leur
est commun, il constitue une idée plus générale
et plus haute. (Parex on peut discuter l'ordre hiérarchique
de plusieurs idées, sans penser à aucune distinction
spatiale ou temporelle.) Et pourtant, comme le nombre,
cette idée a un contenu et un support intuitif,
car des idées pures, ~~intelligibles~~ ^{par exemple}, n'ont pas d'ordre;
elles ont des relations intelligibles, mais pas de rang.
Il faut les situer en quelque sorte dans un réceptacle
imaginaire pour les ordonner. Ici encore, nouvelle
illusion: comparé aux formes sensibles, l'ordre
paraît intelligible; comparé aux choses intelligibles,
il paraît plutôt sensible.

L'idée de l'ordre paraît pouvoir se réduire à l'idée de
correspondance, qui joue un rôle essentiel en Analyse,
car elle est la racine de l'idée de fonction. En effet,
l'ordre peut se redéfinir par la correspondance de
 n objets à n places déterminées. Autant il y a de
correspondances ^{données} différentes, autant il y aura d'ordres.

Par exemple (Cournot) si l'on considère n sphères
de rayons différents et n points de l'espace / suffi-
samment éloignés pour que 2 sphères ne puissent
jamais se ~~percuter~~ ^{toucher} (se couper), combien y aurait-il
de manières de distribuer ces sphères en ces points ?
Autant que de permutations de n objets, soit $n!$.
On voit ainsi que les diverses dispositions diffèrent
par la configuration géométrique de l'ensemble,
sans qu'il soit besoin d'établir aucun ordre
entre les différentes places. Il suffit que les objets
soient différents entre eux. Ainsi l'idée d'ordre
est dépourvue de tout élément intuitif et sensible,
spatial ou temporel: elle se réduit à la ~~pure~~ ^{pure} notion
de correspondance. *purement intelligible*

Mais elle suppose (par définition même) un substratum
intuitif ou l'on puisse déterminer des places
qu'on doit attribuer aux objets. Ce substratum
n'est pas l'espace, avons-nous dit; et néanmoins
il doit offrir une multiplicité, une extériorité.
(*partes extra partes*) Le substratum commun du
nombre et de l'ordre pourrait être la grandeur.

III L'idée de grandeur, en effet, est antérieure au
temps comme à l'espace, puisqu'elle leur est
commune, et elle les dépasse, car elle s'applique
à des objets qui ne sont ni étendus ni ~~durables~~ ^{temporels}
(masses, températures, etc.) De plus, elle ne vient pas
de l'intuition sensible, car le continu ne peut venir:
en

Les grandeurs incommensurables ne peuvent être objet
d'expérience. L'ensemble des points rationnels d'une
ligne par ex., suffit, et au delà, à donner l'illusion
de la continuité sensible: il comporte plus de précision
que n'en exigeraient jamais les mesures empiriques. Aussi
la création des nombres irrationnels répond à un
besoin de l'esprit, et non à une exigence de l'expérience.
Le continu est donc une pure idée.

D'autre part, ^{l'idée de} la grandeur revêt une forme sensible
dans l'espace et le temps, tout en leur fournissant
un fondement intelligible. C'est une multiplicité
infinie et continue, comprenant un ensemble de
grandeurs particulières et déterminées. C'est une idée
à la fois universelle et concrète, et essentiellement
synthétique, puisqu'elle est le fondement des axiomes
mathématiques (jugements synthétiques a priori.)
C'est donc une sorte de intuition rationnelle.

C'est elle qui fournit un contenu intuitif au nombre.
Les nombres représentent les grandeurs discrètes composées
de unités: ces unités sont situées et découpées au sein
du substratum homogène et continu de la grandeur.
De même, elle sert de support à l'idée d'ordre, en
offrant des places différentes au sein d'une diversité
tout idéale, d'un étendu intelligible. C'est en
effet l'étendue de Descartes, Spinoza et Malbranche,
étendue infinie et indivisible comme tout, mais
réceptacle de toutes les idées de grandeurs particulières.

IV Ces rapports hypothétiques entre les ordres³ fondamentaux expliquent les relations réelles de subordination et de mutuelle dépendance des sciences mathématiques qui peuvent servir, inversement, à les confirmer (c'est la méthode même des sciences expérimentales). Nous avons vu, en effet, que la science du nombre n'est pas indépendante et ne se suffit pas à elle-même. L'arithmétique pure (Théorie des nombres) tire un grand secours de l'ordre de ordre (Poisson) c'est que l'ordre de ordre enveloppe les ordres de nombre, avec un mélange de ceux qui donne plus de prise sur ^{elle-ci} ~~elle~~. Elle ne se développe que grâce à l'Analyse, c'est à l'ordre de grandeur: en effet, la principale difficulté de l'arithmétique supérieure vient de la discontinuité des propriétés des nombres; en les plongeant dans le continu, on relie en quelque sorte ces propriétés, et les ~~cas en apparence~~ ^{on fait rentrer} dans une ~~même~~ ^{loi} commune les cas en apparence exceptionnels. Il en est de même pour la science de l'ordre: elle se généralise grâce à la continuité (par ex. la Th. des probabilités) et l'ordre continu sert souvent à expliquer l'ordre discontinu, formé de unités isolées.

L'Algèbre ne s'achève que grâce à la science de l'ordre et à celle de la grandeur: la résolution algébrique des équations fait appel à la Th. des substitutions, et la résolution numérique à la Th. des fonctions, à l'ordre

de continuité, attribuent caractéristique de la grandeur. Ainsi les sciences du nombre et de l'ordre ne sont ni autonomes ni complètes: elles viennent se fondre et s'élargir dans la science de la grandeur, qui les enveloppe et les dépasse infiniment. (seul vraiment)

II. Dans ce Cours, on est générale, sans exception, surtout occupé de la question critique, de la valeur des idées et des principes. Pourquoi a-t-on négligé la question logique et la question métaphysique? D'abord la question métaphysique ^(qualité de l'objet) ne se pose pas pour les Math. pures, mais pour les Math. appliquées. La Géométrie en premier lieu. Ce par l'espace et le temps que l'idée de grandeur se réalise et s'applique aux phénomènes. Quant à la question de méthode elle disparaît, parce que les Math. pures sont elles-mêmes une méthode: c'est la logique universelle des sciences; selon la pensée de Descartes de sorte que la méthode des Math. ne se distingue qu'en des principes de la Math. Par exemple l'Algèbre, par sa matière, est une Arithmétique générale, ayant pour objet le nombre; mais par sa forme, c'est une théorie générale du calcul formelle et abstraite; c'est la Logistique, c'est-à-dire de déduire de telles prémisses la conclusion qu'elles comportent; c'est ^{une} la logique pure ^{qui se peut appliquer à tout} d'où l'on s'est-on demandé si cette méthode universelle de calcul ne serait pas applicable à tous les concepts et à tous les raisonnements, si l'on ne pourrait pas constituer la logique sur le modèle de l'Algèbre, ou appliquer l'Algèbre à la Logique. L'étude de cette question nous ferait ^{mieux} comprendre la nature, la valeur et la portée de la mathématique; ce sera l'objet du Cours de l'an prochain.

(1) Exemple le binôme de Newton et une formule générale de combinaisons

(
en
en
Fay
Ch
h
to
en
th
ly
ly
e
e
re
de
res
e
est
en
at
ail

5
-
2

l
a
s
c
I
s
id
L
T
P
P
s
ch
W
ch
re
L
a
t
L
L
qu
a
l
a
a

~~Leibnitz~~

Mach: Mécanique
Thermologie

Schröder

Whitehead

Cantor — Peano.

Vailati — Halsted

Portuondo

Spiegel

& a

~~Halsted~~

I
 ch
 se
 to
 f
 p
 g
 ch
 m
 de
 re
 to
 a
 t
 to
 v
 g
 A
 -
 p
 i
 a
 a

Ernst Mach: die Mechanik in ihrer Entwicklung.

3^e ed. Leipzig, Brockhaus, 1897 (1^{re}, 1883; 2^e, 1888.)

Tendance anti-métaphysique. Fera ressortir le contenu physique de la Mécanique.

Principe de toute ^{est empirique} science: Economie de la pensée.

Nouvelles relations de la Mécanique et de la Physique (Hertz.)

- Introduction. La connaissance instinctive précède la connaissance scientifique. Elle est acquise par la satisfaction de nos besoins, par la pratique industrielle.

- Distinguer les expériences mécaniques et la science de la Mécanique. Leur disproportion chez les Anciens (Pourtant, Vitruve connaît fort bien la nature du son.)

La science naît de la division du travail, de la spécialisation des métiers. Pour transmettre les préceptes d'un métier, il faut simplifier et généraliser; on ne peut exprimer par concepts que ce qui est uniforme et régulier. (nominatisme) C'est le résumé de l'expérience. C'est la description la plus courte et la plus économique des faits. - Expliquer, c'est ramener à des éléments aussi simples et aussi connus que possible. Adaptation

de la pensée aux choses. Ramener l'inconnu connu, c'est ramener le rare au fréquent, l'étonnant à l'habituel.

La science économise la pensée pour le praticien; moyen d'action, elle finit par être prise pour fin. Elle a pour but d'économiser des expériences en prévoyant leur résultat.

Utilité de la connaissance de l'histoire des sciences.

Ch. I. Evolution des principes de la Statique

1. Le principe du levier. La démonstration d'Archimède repose non sur le principe de symétrie, mais sur un principe expérimental qui équivaut à la loi générale, à savoir que ce qui détruit l'équilibre, est le moment statique (P.L.) De même celle d'Huyghens, fondée sur la notion du centre de gravité.

Léonard de Vinci a conçu le parallélogramme des forces ou le principe du levier dans un cas particulier.
2. Le principe du plan incliné. Chârn sauvo fin de Stevin. Il invoque l'impossibilité du mouvement perpétuel. C'est là une connaissance instinctive, résumé d'expériences, ayant par suite une autorité supérieure à une expérience. Rien de mystique dans ces principes, non infailibles, mais aussi objectifs que l'expérience qu'ils résument. Ils dispensent de faire l'expérience ou la fait par la pensée. Comme ils sont très généraux, ils contiennent une foule de lois particulières; c'est là la philosophie de la science.

3. Le principe de la composition des forces. Peut se déduire du plan incliné (Stevin) qui en est un cas particulier. — Démontré par Varignon et Newton, comme un théorème de Géométrie (au moyen des mouvements: c'est une Statique fondée sur la Dynamique) Bernoulli y voyait une vérité purement géométrique; mais cela suppose que l'on connaît déjà la résultante de certains cas particuliers. C'est en réalité une vérité d'expérience car cela suppose qu'une force a une grandeur & une direction,

et n'agit que dans sa propre direction. La démonstration mathématique (par le théorème des projections) suppose que l'un système de forces agissant sur un point peut être remplacé par une seule force appliquée au même point, ce qui équivaut au principe du parallélogramme ou au principe des projections.

Le principe de l'indépendance des forces est aussi une vérité empirique, implicitement postulée dans la démonstration du parallélogramme par Bernoulli :

4. Le principe des déplacements virtuels. (Stevin.) Découvert à propos des systèmes de poulies. Galilée a remarqué qu'un système de poids est en équilibre quand on total aucun ne peut descendre. Torricelli a formulé ce principe : quand le centre de gravité ne peut descendre. Le principe a ainsi une sorte d'évidence instinctive. Ce qui détermine l'équilibre (ou détruit l'équilibre) c'est ΣPh , le travail. Pas évident a priori, quoi qu'en dise Pascal. L'expérience seule nous apprend que c'est le travail qui détermine l'équilibre ; qu'il est ~~indifférent~~ ^{de} de plusieurs travaux joint du propriétés commutative et associative.

Jusqu'à Newton, la force considérée est toujours le poids. C'est Newton qui généralise le rôle de force. Formule du principe : N'y a équilibre lorsque la somme des moments virtuels est nulle (dans les machines, réversibles) ou négative (dans le cas de ^{déplacements} déplacements irréversibles).

Essai de deduction de Lagrange: il réduit toutes les forces du système, par des fils, à un poids unique. Mais cela suppose déjà que c'est le travail qui donne la mesure de l'équilibre (dans les systèmes de poulies.)

Loi de repos de Maupertuis: Les positions d'équilibre correspondent aux cas où la variation du travail est nulle (en partiel, ou minimum [eq. instable] ou au maximum [eq. stable]) - Loi de Courtyrou (1749): aux cas où la force vive du système est maxima ou minima.

Le principe de l'équilibre indique que les processus de la nature ~~ne~~ effectuent deux-fois dans un sens déterminé, et non dans le sens contraire [?]

Ce principe revient en somme à la constatation d'un fait: les corps tombent tant qu'ils peuvent tomber. Tout principe est explicatif, mais en même temps il illustre, en permettant de déduire toutes les lois d'une seule.

5. Retour sur l'évolution de la Statique.

La science naît de l'expérience industrielle, et du besoin de la ~~con~~formuler et de la communiquer, de la résumer, en des règles économiques.

Une telle règle ne se prouve qu'à la longue, par l'expérience. Les inventeurs la confrontent avec les règles antérieures et avec les principes instinctifs nés de l'expérience accumulée, etc. et c'est ce qu'ils appellent démontrer une loi. Sur ces démonstrations forment. elles une sorte de cercle vicieux. Si l'on préfère une loi à une autre équivalente, c'est pour des raisons économiques et esthétiques, si un principe permet d'embrasser en une formule une foule de faits différents.

La recherche de démonstrations dans les sciences expérimentales engendre une fausse rigueur (Exemples: Archimède, Bernoulli.)

Les connaissances instinctives nous paraissent certaines et objectives, et c'est pourquoi on les croit a priori. Mais ce sont des connaissances empiriques, dont l'autorité vient de l'expérience accumulée.

Tous les principes contiennent une règle pour reproduire mentalement les phénomènes (d'une façon schématisée).

La force est conçue à l'imitation de l'immersion volontaire (cause de mouvement) comme une pression. On peut se débarrasser ou se passer de cette conception subjective et empirique.

Insuffisance de la mesure subjective des forces (efforts). On les considère comme homogènes, et on les compare aux poids, grandeurs mesurables (cf. l'établissement de l'échelle thermométrique).

6. Principes de la statique appliqués aux fluides.
 Héurika de Archimède. Principe de la solidification, de Stevin, employé pour découvrir le principe de Archimède, en joignant le impossibilité du mouvement perpétuel.
 Galilée applique le principe des déplacements virtuels à la Hydrostatique. Pascal l'applique plus correctement, en faisant abstraction du poids et en ne considérant que la pression superficielle.
 Propriétés des liquides: déplacement facile de leurs parties.
 Faible compressibilité; pression équilibrée par l'élasticité.

D'où égalité des pressions dans un liquide au repos.
Pascal la prend comme un principe de fait.

On suppose ensuite le liquide pesant, surfaces de niveau.
Paradoxe hydrostatique. Centre de pression sur une paroi.
Principe de l'Archimède.

Dérivation des principes de la Statique au moyen de
l'Hydrostatique: ~~trois~~ 3 forces en équilibre forment un
triangle. - Formule de Green; théorie du potentiel.

7. Principes de la Statique appliqués aux corps gazeux.
~~Alors~~ Expérience de Viviani (1643) expliquée par Torricelli.
Pascal identifie la pression de l'air à la pression hydrostatique.
Expériences d'Otto de Guericke (publiées en 1672.) Poids
de l'air.

Boyle découvre la loi de Mariotte, & la reconnaît inexacte.

Ch. II: Evolution des principes de la Dynamique

1. ~~Œuvres~~ ^{Travaux} de Galilée. Opposition avec Aristote.

Léonard de Vinci avait étudié la chute sur le plan
incliné; ~~donne~~ découvre le principe de l'inertie.

Benedetti (1585) reconnaît l'accélération et l'inertie.

Galilée (1638) se demande, non pourquoi, mais comment
les corps tombent (recherche des lois, et non plus des causes).
Il crut d'abord que la vitesse est proportionnelle à l'espace.
Triangle de Galilée: La vitesse moyenne est moitié de la
vitesse finale. $v = gt$, $s = \frac{1}{2} gt^2$.

Galilée admet que le corps qui tombe sur un plan incliné
acquiert la même vitesse qu'il eût tombé verticalement
de la même hauteur (c'est-à-dire mouvement perpétuel
(un corps ne peut monter en vertu de son poids).)

7

Vérification au moyen du pendule de longueur variable.
En conséquence, les temps de chute sont proportionnels
~~à la~~ ^{à la} longueur et à la hauteur du plan incliné, et les
accélérations inversement proportionnelles. Les points
qui tombent d'un même point sur diverses inclinaisons
sont constamment sur la surface d'une sphère.

Galilée fait souvent usage du principe de continuité.
Il découvre ainsi le principe d'inertie, en considérant le
plan horizontal comme limite du plan incliné.
Le principe signifie que la cause déterminante du
mouvement est proportionnelle à l'accélération
(ce qui n'est nullement évident; ~~la cause du mouvement~~ ^{les différences de température}
~~de la chaleur est~~ ^{la} ~~cause~~ ^{différence} ~~dérivant~~ ^{de} la vitesse de la chaleur,
et non l'accélération.)

Inanité des démonstrations du principe d'inertie.
Généralisation de la notion de vitesse ($\frac{ds}{dt}$) et de la
notion d'accélération ($\frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$) Représentation
graphique et analytique. Une formule n'est qu'une règle
pour dresser un tableau.

L'action d'un corps, dans le temps, est proportionnelle
à sa vitesse; dans l'espace, au carré de sa vitesse. D'où
le malentendu entre Cartésiens et Séculiers.

Combinaison de la chute avec une vitesse initiale;
par le parallélogramme des mouvements. Principe
de l'indépendance des forces. Généralisation: double
processus d'isolation et de superposition (ex: vibrations).
Analyse et synthèse des phénomènes élémentaires.
(Cf. Volkmann, Erkenntnistheoretische Grundzüge der
Naturwissenschaft, 1896.)

2. ~~Travaux~~ ~~Documentos~~ de Huyghens.

Force centrifuge et centrifuge, leur loi: $q = \frac{v^2}{r}$.

Hostilité à l'action à distance, Huyghens essaya d'expliquer l'attraction newtonienne par la force centrifuge de corps plongés dans un milieu plus dense qu'eux-mêmes.

Etude du pendule simple (Similitude phoronomique)
Pendule ^{conique} ~~circulaire~~ (avec force centrifuge) d'où l'on déduit la formule du pendule oscillant: $T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$.

En général, le pendule conique décrit un cône elliptique.
Détermination de g par le pendule.

Théorie du centre d'oscillation. Le centre de gravité du pendule composé doit remonter à la même hauteur (en vertu de l'impossibilité du mouvement perpétuel) que les molécules soient libres ou liées. De ce principe (instinctif) on tire l'équation: $k \frac{\sum mr}{\sum m} = \frac{v^2}{2g} \frac{\sum mr^2}{\sum m}$

$\sum mr^2$ = moment d'inertie.

k hauteur de chute; v vitesse acquise au point le plus bas du pendule.

Longueur du pendule simple synchrone: $L = \frac{\sum mr^2}{\sum mr}$

L'équation de Huyghens exprime l'équivalence du travail et de la force vive. Egalité de la hauteur de chute et de la hauteur où remonte le pendule:

$$\sum ph = \frac{1}{g} \sum \frac{pv^2}{2} = \frac{1}{2} \sum mv^2$$

Théorèmes touchant les divers axes d'oscillation. — Pendule réversible } Lieu des axes réciproques d'oscillation.
(de Kater)

Caractère économique du concept «moment d'inertie».

Ellipsoïde de inertie de Poinsot.

3. Travaux de Newton

9

Découverte de la gravitation universelle; systématisation des principes de la mécanique.

La loi des aires (Kepler) s'explique par une accélération centripète. La 3^e loi détruit la loi d'attraction.

Des lors s'explique la 1^{re} (ellipse) mathématiquement.

Newton identifie la gravitation universelle à l'accélération de la pesanteur; trait d'imagination hardie, fondé sur le principe de continuité. Ses précurseurs.

Un même corps pouvant recevoir des accélérations différentes, il s'ensuit la distinction de la masse et du poids, et la généralisation de l'idée de force.

Newton conçoit la force comme déterminatrice de l'accélération.

Il définit la masse (quantité de matière) par le produit du volume et de la densité. Cercle vicieux.

Le concept de masse provient de ce qu'il y a dans la matière un élément modificateur du mouvement, ~~qui résiste~~ ^{un degré} de résistance au changement de vitesse (force d'inertie, mal nommée.) La masse appartient à la catégorie de la substance (caractères permanents et constants des objets.)

Proportionnalité des masses aux poids (en un lieu.)

Newton a clairement formulé le principe de ~~la~~ composition des forces (en vertu de leur indépendance.)

Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

(rendu nécessaire par la dynamique des systèmes, &c. comme celui d'Huyghens, quoique plus intuitif en apparence.) C'est un principe intuitif, expérimental.

La vérification implique la définition de la masse.

4. Explication et démonstration du principe de la réaction.

Newton définit la force par le produit masse \times accélération. Dès lors, l'accélération est en raison inverse de la masse. Il ne s'agit que de l'accélération relative, commune aux deux corps en présence. (Galilée avait déjà réfuté les péripatéticiens, qui croyaient que les corps plus grands tombent plus vite. Expériences où une accélération imprimée à une masse de Poggendorff modifie son poids. Phénomène des marées, expliqué par la différence d'accélération entre la terre et le ciel. (Longue citation de Quinte-Curce.)

5. Critique du principe de la réaction et du concept de masse. (métaphysique)

La notion de quantité de matière n'est pas claire, et ne fournit aucun moyen de mesurer la masse. Au fond, le principe de réaction et le concept de masse sont relatifs l'un à l'autre: deux corps ont des masses égales quand ils se communiquent des accélérations égales. En g^{en}. leurs masses seront en raison inverse des accélérations qu'ils se communiquent par leur action réciproque. (Définir une grandeur, c'est donner le moyen de la mesurer, et en apprécier l'égalité & l'inégalité, etc.)

Difficulté (générale): Les masses étant mesurées par rapport à un étalon, leurs rapports subsistent-ils quand on les rapporte à un autre étalon? Ce n'est pas là une nécessité logique, mais un fait d'expérience physique (on peut le déduire de l'impossibilité du mouvement perpétuel). Le principe de réaction est donc déjà impliqué dans la

définition de la masse, et ne fait quela répéter.

Cette définition résulte la proportionnalité des masses aux poids (même accélération), ce qui permet de les mesurer pratiquement. (d'expérience)

Tout cela ne fait qu'exprimer ce fait, que chaque corps possède un caractère qui détermine son accélération.

6. Vues de Newton sur le temps, l'espace et le mouvement.

Newton distingue le temps relatif et le temps absolu. Il est en cela infidèle à son principes en considérant que les faits. Dire qu'un objet change avec le temps, c'est dire que ses états dépendent des états d'un autre objet (de la rotation de la terre). Un mouvement n'est uniforme que par rapport à un autre, et non en soi. Quand on fait abstraction de toutes les circonstances extérieures (en apparence indifférentes), on a l'idée du temps absolu, concept métaphysique et vide. (Mach admet que ~~certains~~ ^{les états} correspondants ont lieu en même temps) Le temps n'est rien en dehors des choses qui passent. L'irrégularité du temps vient de ce que ^{seulement} une partie des changements dans la nature dépend de nous, et peut être renversée. La différence du passé et du présent provient de la distinction des domaines du souvenir et de la perception. Dire que le temps a un sens, c'est dire que les processus physiques se font dans un sens unique et déterminé. (Les différences de température, de potentiel, etc. ne peuvent que diminuer.) - On passe du temps physiologique & physique au temps mathématique commun des sensations de chaleur à la notion de température. On choisit arbitrairement un mouvement à peu près parallèle à ^{notre} la sensation du temps.

Il n'y a eu que des phénomènes en dépendance mutuelle:
des lors toute obscurité métaphysique disparaît (l'usage
de l'homme à hypostasier ses abstractions.) v. Wärme

Newton ~~distingue~~^{fait} aussi un espace absolu, un mouvement
absolu, comme nécessaires à la mécanique, bien qu'inobservables.

La force centrifuge permet de distinguer ^(intrinsèquement) le mouvement absolu
— Tout mouvement est relatif; les lois mécaniques sont relatives
au monde physique, au ciel des étoiles fixes. La force centrifuge

n'est que des mouvements relatifs à ces repères empiriques.

Le principe d'inertie ne postule pas non plus un espace absolu
il ne concerne que les accélérations relatives. On peut considérer
le mouvement d'un corps en faisant abstraction du reste du monde.

— Discussion des objections de Streintz; de la définition
de l'inertie par Lange (relative à un système d'axes qui

implique le principe). — Le principe d'inertie est relatif
au ciel des étoiles fixes et à la rotation de la terre.

On peut réaliser l'espace en le concevant comme un milieu
physique.

7. Critique d'ensemble des théories de Newton.

La définition de la masse ne signifie rien. La définition
de l'inertie fait double emploi avec celle de la force,
comme cause d'accélération. Le principe d'inertie et celui

de la proportionnalité de l'accélération à la force sont
impliqués dans la définition de la force. Le principe de

réaction est relatif de la définition de la masse. Le principe
de l'indépendance des forces (des accélérations) n'est pas

évident, mais un fait d'expérience.

Nach formulierte die Prinzipien der Mechanik newtonianum
sous la forme la plus simple (p. 242) la plus économique

8. Retour sur l'évolution de la Dynamique

Le concept mathématique de force n'a rien d'obscur ni de métaphysique : masse et accélération sont les deux éléments déterminants du mouvement.

Galilée a préféré déterminer la vitesse en fonction du temps qu'en fonction de l'espace. Les deux étaient possibles, et donnaient la loi du mouvement. Suivant qu'on prend pour élément déterminant de la vitesse le temps ou l'espace, on obtient le système de Galilée-Newton, fondé sur les notions de force et de quantité de mouvement, ou le système d'Huyghens, fondé sur les notions de travail et de force vive (la force est alors la dérivée du travail par rapport à l'espace parcouru) [Mach déprécie Descartes.]

Les deux systèmes sont équivalents : $p.t = mv$, $p.s = \frac{mv^2}{2}$. Ils pourraient se développer séparément; historiquement, ils se sont mêlés. Newton le premier a nettement distingué la masse du poids. La méthode de Newton détermine le mouvement de chaque masse; celle de Huyghens est préférable pour déterminer le mouvement du système.

Part du hasard et de la convention dans l'évolution de la science. C'est la nécessité de rechercher les lois élémentaires (différentielles) plus simples, qui oblige à considérer la vitesse et la force (ou accélération) pour déterminer les relations entre les positions des corps (lois intégrales).

— Critique de la Mécanique de Hertz (1894) Le principe de moindre action n'est pas finaliste. Le principe adopté par Hertz est une synthèse du principe d'inertie et du principe de moindre contrainte (de Gauss). Remplace les forces apparentes par des liaisons cachées avec des masses cachées. L'action

au contact n'est pas plus intelligible que l'action à distance.
Tandis que Newton remplace toutes les liaisons par des forces,
Hertz remplace toutes les forces par des liaisons (fictives).
Mais la fiction est moins commode. Les principes expérimentaux sont au fond toujours les mêmes.

Chap. III: Application ultérieure des principes et développement deductif de la Mécanique.

1. Portée des principes de Newton?

Ils suffisent à résoudre tous les problèmes mécaniques;
il n'y a plus que des difficultés mathématiques à résoudre.
Ils s'appliquent aux cas d'équilibre et de repos. Mach fait
intervenir dans ces cas les forces statiques, il n'y a jamais
de véritable repos. Le corps solide est une fiction schématisée.
[Mach unifiant le sens et le rôle de l'abstraction] En
théorie du levier, en tenant compte de l'élasticité. [Mach fait
intervenir des accélérations aussi fictives que les forces statiques].
Le théorème de Varignon peut se déduire des principes de Newton,
la statique rentre ainsi dans la Dynamique.

2. Les ^(formules) expressions de calcul et mesures de la Mécanique

Elles contiennent toutes la masse m et la force p avec deux
des quantités: s , v , t . Elles montrent si un problème est déterminé
ou non. Nous attribuons aux expressions mv , mv^2 , ps , pt
Mauvin dont Descartes définit la quantité de mouvement
et en déduit la constance de l'invariabilité divine (trop
de métaphysique et d'a priori). Définition de la force
par Leibnitz. Il confond la question de la mesure de la force
et celle de l'invariabilité de la somme $\sum mv$ ou $\sum mv^2$.

Principe de l'homogénéité. Dimensions. Systèmes de mesures.

3. Lois de la conservation de la quantité de mouvement, de la conservation du centre de gravité et de la conservation des aires.

Ces sont des règles spéciales à certains cas généraux, déduites des principes de Newton.

La quantité de mouvement d'un système est déterminée uniquement par les forces extérieures.

Le mouvement du centre de gravité d'un système est déterminé uniquement par les forces extérieures. Ex: recul des armes à feu. L'arrêt des locomotives.

La ~~summe~~ somme des aires décrites par les rayons vecteurs (et multipliées par les masses) est indépendante des forces intérieures du système. Par suite, elle croît uniformément quand il n'y a pas de forces extérieures, ou quand elles passent toutes par le centre fixe. Ex: moteur électrique mobile autour d'un axe. Roues à réaction.

Le principe des aires exprime le principe de conservation dans le système des coordonnées polaires, comme le principe du centre de gravité dans le système de coord. cartésiennes.

Rôle du sentiment dans la Mécanique, justifié par cette remarque que nous sommes des machines vivantes et sensibles.

4. Loi du choc.

Marcus Marci, de Prague: De proportionibus motus (1639.)

Expérience infructueuse de Galilée. Tentative inutile pour mesurer un choc par un poids. Le moindre choc peut vaincre la force (pression) la plus grande.

Wallis étudie le choc inélastique, pose un principe la conservation de Σmv (moments) Wren et Huyghens ont

étudie le choc élastique. Huyghens admet le cas de masses
égales avec vitesses égales; et que. un corps si petit qu'il soit
frappe un corps au repos, si grand qu'il soit. Rien d'autre
les règles générales au moyen du principe des mouvements
relatifs (fiction du bateau.) et du principe de symétrie.
Si l'un des corps rebondit avec la même vitesse, l'autre aussi.
Il aboutit à la conservation de Σmv .

Connaiss empiriques nouvelles. Il y a des corps élastiques
et inélastiques. Considération des forces développées par le
changement de forme des corps; d'où conservation de la
vitesse relative des 2 corps élastiques. L'expérience seule
nous apprend que mv est le déterminant du choc.

On peut déduire les lois de Huyghens des principes de Newton.

Tout dépend uniquement de la différence de vitesse des 2 corps.

La quantité de mouvement qu'on conserve n'est pas la
quantité absolue, comme le croyait Descartes.

La perte de force vive dans le choc inélastique (Carnot)

- Choc excentrique; théorie du centre de percussion (Wallis)

Pendule balistique de Robins. Pas de forces instantanées

(Poncelet)

5. Principe de D'Alembert.

Proviens de la théorie du centre d'oscillation (Jacques et Jean
Bernoulli) L'accélération angulaire du pendule composé
est égale au quotient de son moment statique par son moment
d'inertie.

Etant donné un système de forces P appliquées à des points
soumis à des liaisons, on les décompose en forces actives W
suivant le sens du mouvement, et en forces de liaison - V .
Le système V est en équilibre; donc les syst. P et W aussi.
Tout le travail produit par les forces P est produit par les forces W .

6. Principe des forces vives. (Huyghens)

Se généralise en s'étendant aux forces variables :

$$\sum \int p \, ds = \frac{1}{2} \sum m (v^2 - v_0^2)$$

Dans le cas des forces centrales (où il y a une fonction des forces [Hamilton]), $\int p \, ds$ ne dépend que de la position initiale et finale, et devient: $\int dV = V_1 - V_0$.

7. Principe de la moindre contrainte (Gauss)

Soit ab le chemin que parcourrait ch. p. s'il était libre, ou celui qu'il parcourt en vertu des liaisons; bc est dit l'écart. Le principe de Gauss énonce que le mouvement réel est celui pour lequel $\sum m(bc)^2$ est minimum. Il se déduit du principe de D'Alembert.

Diverses formes: $\sum ms^2$, $\sum ps$, $\sum mv^2$.

Le principe comprend l'équation comme cas particulier. Toute liaison ajoutée augmente la somme des écarts. Exemples: corps glissant sur un plan incliné mobile. Le principe de Gauss n'apprend rien de nouveau, c'est une forme nouvelle des principes connus. Il n'a aucun sens métaphysique ou mystique (!) Il s'agit de définir mathématiquement la contrainte.

8. Principe de la moindre action (Maupertuis)

Maupertuis mesure l'action par mvs , ou n'est pas sûr pourquoi. Il commet des incohérences (pour la ^{réfraction} par ex.) Euler cherche une loi de finalité qui se traduit par un maximum ou un minimum. Il définit l'action: $\int v \, ds$. Cela suppose que la vitesse est fonction de la position, i.e. qu'il y a une fonction des forces (cas où s'applique le principe des forces vives). La condition exacte est que la (1) Il fournit les équations de D'Alembert par différentiation. On peut toujours trouver, en intégrant les eq. diff., la fonction qui a une variation nulle pour le mouvement considéré.

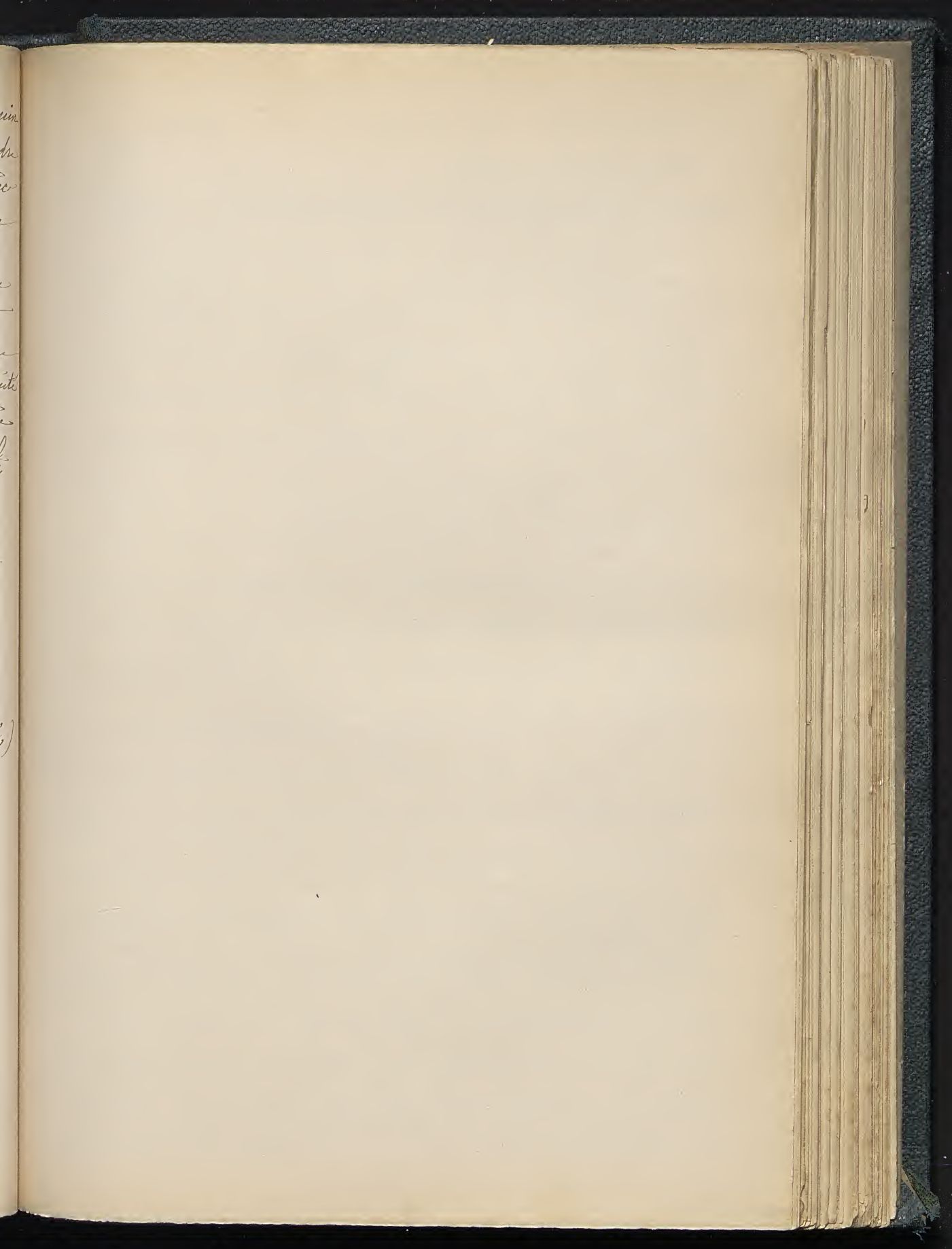
variation de δ soit nulle, sans qu'il y ait maximum ou minimum. Analogie entre le mouvement déterminé par la moindre action, la position d'équilibre d'un fil tendu, et la trajectoire d'un rayon lumineux déterminés aussi par un minimum.)

En fond, ces principes de minimum disent qu'il arrive tout ce qui peut arriver, c'est-à-dire que le mouvement est déterminé d'une manière unique. Or (selon remarque de Petroldt), le cas unique ^{et exceptionnel} déterminé par une infinité d'autres correspond à la variation nulle d'une certaine fonction: c'est pourquoi c'est le cas du mouvement réel. [Principe du déterminisme, ou de raison suffisante ?]

9. Principe de Hamilton

V étant le travail et I la force vive, la variation de $\int (V + I) dt = 0$

doit être nulle, pour une trajectoire infiniment voisine ayant mêmes extrémités (c'est-à-dire que δV et δI sont nulles au commencement et à la fin). Ce principe se déduit du principe de D'Alembert (v. Kirchhoff, Jacobi). Il lui est donc mathématiquement équivalent.



E. Mach: die Principien der Wärmelehre

Leipzig, Barth, 1896.

Préface: Pro dicendi non in de biographia; c'est
une histoire des idées.

Introduction. Les théories régnantes sont souvent un
obstacle au progrès des sciences; les grandes découvertes
sont dues à des esprits affranchis du préjugé de leur temps.
L'histoire des sciences enseigne l'indépendance et l'esprit
critique. — Le développement de la théorie de la chaleur
a été plus lent et plus laborieux que celui de la Mécanique⁽¹⁾

Histoire du développement de la thermométrie.

Les sensations de chaud et de froid nous révèlent l'état
calorique des corps, mais ne permettent pas de le mesurer,
à cause des variations et contradictions. Il fallait trouver
un signe objectif de cet état: Galilée a choisi le volume,
et inventé le thermomètre à air. Sturmi et Heubner ont
inventé le thermomètre différentiel (à air). Amontons
(1699) invente un thermomètre-manomètre à air: il mesure la
température par la pression: il introduit du zéro absolu que
Clement et Desormes ont retrouvé plus d'un siècle après (1819).
Lambert mesure aussi la température par la pression, et
corrige les indications des thermomètres à air par celles
du baromètre. Il choisit pour points de repère la glace
fondante et l'eau bouillante (1417 et 1000, impression).
Le thermomètre à liquides fermés, est dû peut-être à Rey (1631).
Renaldini emploie les repères: glace fondante et eau bouillante.

(1) Voir: die Mechanik in ihrer Entwicklung, par E. Mach.
(2^e éd 1889; in 8°, 492 p.) Leipzig, Brockhaus, 1883.

Fahrenheit construit des thermomètres à mercure (1714.)
Réaumur invente son échelle (1730.) Celsius invente l'échelle
centigrade (1742) que Strömer retourne comme à présent.
Dilatation des corps solides, étudiée par l'Académie de
Cimento, Murchenbrock, s'Gravesand et Lowitz.

Loi de Boyle (1662) ou de Mariotte (1679) contrôlée par
Regnault et par Amagat (1880.) PV passe par un minimum.
Loi de Charles (1787) ou de Gay Lussac (1802) découverte
aussi par Dalton (1801.) Coeff. de dil. de l'air de 0 à 100 : 0,375.
Le coeff. de augm. de pression est un peu différent. Gay Lussac
a vérifié la proportionnalité de la dilatation de l'air et de celle
du mercure entre 0° et 100°. Zéro absolu : -273° ($\alpha = \frac{1}{273}$)

Température absolue : $T = 273 + t$. $\frac{PV}{T} = \text{Constante}$.

Dalton constate que, à la même température, la tension
d'une vapeur dans le vide est la même que dans l'air. En
général, dans un mélange de gaz et de vapeurs, chaque gaz
se comporte comme s'il était seul (1801.) Il complique
cette loi d'une hypothèse gratuite, en disant que les particules
d'un fluide ne pressent pas celles des autres, ~~mais~~

Les vapeurs non saturées (ou surchauffées) suivent la loi de
Mariotte-Gay Lussac (Expériences avec un tube barométrique.)
Mesure de la tension maxima des vapeurs : méthode statique
(par le vide barométrique) méthode dynamique (par l'ébullition).
Recherches de Regnault sur la pression de la vapeur d'eau.
Cagniard de la Tour a obtenu des vapeurs dont la densité était
voisine de celle des liquides, à de très hautes températures
et pressions.

Faraday liquéfie les gaz en les produisant en vase clos, sous de fortes pressions. Andrews découvre la température critique (où la tension maxima devient infinie) qui sépare l'état-gaz de l'état-vapeur. Mendelejeff appelle: point d'ébullition absolu, parce que le liquide bout à cette température sous toute pression, si grande qu'elle soit. A cette température, la tension superficielle du liquide s'annule.

Représentation graphique des P, V, T des gaz et vapeurs.

- Deluc a reconnu le maximum de densité de l'eau. (1772) Despretz, puis Exner l'ont déterminé ($+3^{\circ}, 945^{\circ} \text{C}$)

- Mesure de la dilatation des solides: Lavoisier-Laplace, Roy, Ramsden.

Dulong et Petit (1817) ont comparé le thermomètre à mercure au thermomètre à air; déterminé la dilatation absolue du mercure, du verre et de quelques métaux. Les liquides et solides ne se dilatent pas proportionnellement. Si l'on adopte le thermomètre à air, les coefficients de dilatation de tous les autres corps croissent avec la température. Les capacités calorifiques croissent aussi, et inégalement.

Pour Dulong et Petit, l'échelle rationnelle serait celle dont les degrés seraient proportionnels aux quantités de chaleur acquises par le corps thermométrique. Mais pour cela, il faudrait que sa capacité calorifique fût constante.

Dalton (1808) qui déborda des fausses et des conceptions arbitraires, propose une échelle où les degrés correspondent à un accroissement du volume de l'air dans le même rapport.

En somme, Dulong et Petit ont prouvé que l'échelle
dépend du corps thermométrique seul, les thermomètres
à gaz sont comparables entre eux, d'où le choix du
th. à air comme thermomètre normal.

Critique du concept de température.

Le choix du volume, comme qualité ^{d'un corps} thermométrique d'un
corps, est arbitraire et conventionnel: car il y a beaucoup
d'autres propriétés des corps qui varient avec la température.
^{C'est l'expérience qui nous apprend que le volume varie dans le même sens que}
Deux corps longtemps en contact offrent à nos sens le même
état calorifique (exception: le fer paraît toujours plus chaud
ou plus froid que le bois: cela tient à la conductibilité).
L'expérience nous apprend qu'ils arrivent à un équilibre
de volume. D'où la hypothèse arbitraire: on considère comme
égaux les états calorifiques de 2 corps qui mis en contact
ne changent plus de volume.

Si 2 corps A et B sont aussi chauds pour nos sens qu'un
3^e, C, ils sont aussi chauds l'un que l'autre (nécessité
logique). Mais ~~que~~ c'est l'expérience qui nous apprend que,
si les 2 corps A et B ne changent pas de volume en présence
de C, ils ne changent pas non plus de volume en présence l'un
de l'autre (Cf. Maxwell, Theory of heat, 1871). Donc on pose
Si 2 corps A et B ont la même ^{température} ~~température~~ qu'un 3^e corps C,
ils ont le même ^{état calorifique} ~~température~~ l'un que l'autre.

Définition arbitraire: Les températures plus élevées sont celles
qui correspondent à un plus grand volume du thermoscope.
Elles s'usent pas qu'elles correspondent à un plus grand volume.

Ⓐ C'est l'expérience qui nous apprend que le volume varie ^{en sens}
dans le même sens que l'état calorifique senti (exceptions: le caoutchouc).

du corps considéré : exemple : l'eau au dessous de 0°

Les sensations de chaleur et les volumes thermoscopiques forment une multiplicité continue simple; mais il ne s'ensuit pas que les températures en forment aussi une. L'expérience nous apprend qu'un corps ne peut passer d'une température à une autre sans passer par toutes les températures intermédiaires.

Un autre choix arbitraire est celui du corps thermoscopique. Il suffirait de noter et de nommer ses divers états pour les diverses températures; les signes les plus commodes sont les nombres, qui indiquent en même temps l'ordre. L'application des nombres aux états thermoscopiques demande une nouvelle convention.

L'échelle centigrade appliquée au thermomètre à liquide varie suivant la nature du liquide et celle du vase. Tous les gaz suivent la même loi de dilatation, d'où l'on a conclu (à tort) que le thermomètre à gaz était plus naturel ou mieux convenu. Avantages: Simplicité; l'influence de l'enveloppe est négligeable; comparabilité.

La température est le nombre qui correspond à un état calorique (suivant une corrélation univoque: $t = f(v)$).

Principe de Galilée: les volumes croissent en progression arithmétique comme les températures.

Principe de Dalton: les volumes croissent en progression géométrique, le temp. croissant en progression arithmétique.

Principe de Amontons: la température proportionnelle à la pression d'un gaz à volume constant (température absolue.)

On a longtemps méconnu le caractère arbitraire de la température, et beaucoup d'auteurs ont parlé de la température comme d'une grandeur naturelle et réelle, qu'il s'agissait de mesurer: Lambert, Dalton, Gay-Lussac, Dulong et Petit même parlent de dilatation uniforme ou non. Clausius même considère l'expression d'un gaz comme mesurant approximativement la température (Théorie mécanique de la chaleur, 1864.)

Tendance générale de l'esprit à hypostasier des concepts; c'est ainsi que Newton concevait un temps et un espace absolus. Il réalisait nos sensations de temps, et les comparait aux diverses mesures du temps. De même pour l'espace.

Le zéro absolu donne lieu à la même illusion: on croit qu'à -273° la pression d'un gaz s'annule, de sorte que l'échelle des températures serait terminée inférieurement.

Si l'on avait adopté le principe de Dalton, elle serait infinie dans les 2 sens, sans que cela change rien à la possibilité d'une pression nulle. Il ne faut pas prendre les propriétés d'un système de signes pour les propriétés de la chose signifiée.

On peut concevoir un foule de zéros absolus: tous dépendent de hypothèses invérifiables, et ne préjugent en rien les faits.

De ce que la pression devenant nulle, l'échelle thermométrique fait défaut, il ne résulte pas que les états caloriques ^{supérieurs} n'existent pas [Exemple emprunté aux hauteurs de Soud ^{inférieurs}]

(Comparaison avec l'argument ontologique) mais seulement que le gaz ne peut plus servir de thermomètre. L'expérience seule peut nous apprendre si la série des états caloriques est limitée supérieurement ou inférieurement.

7

En résumé, la température est la désignation d'un état calorique par un nombre, un numéro d'ordre. Le concept de température est un concept de niveau (absolu.)

Sur la détermination des hautes températures.

Newton, en s'appuyant sur la loi du refroidissement des corps, mesure leur température initiale à la durée du refroidissement. Il commet ainsi: 1^o une extrapolation; 2^o une pétition de principe. Les pertes de chaleur sont proportionnelles à la chaleur (càd. à la température); 3^o une confusion de la température avec la quantité de chaleur; 4^o enfin il suppose arbitrairement que la température est proportionnelle à la dilatation de son thermomètre à huile de lin. Il y a là deux échelles de température distinctes, qui coïncident approximativ^{mt} et par hasard.

Principe pyrométrique de Biot: sur une barre chauffée à un bout, la température décroît en progression géométrique quand la distance croît en progression arithmétique. Cette loi est déjà inexacte dans les limites accessibles au thermomètre. Au delà, elle constitue une extrapolation arbitraire, qui définit une nouvelle échelle de température.

Méthode pyrométrique de Black: il mesure au calorimètre la température d'un corps très chaud (la température initiale et finale du calorimètre étant accessible au thermomètre.) Mais cela suppose que la chaleur spécifique du corps ne varie pas avec la température, ce qui n'est déjà faux dans les limites du thermomètre usuel. (1804.)

En général, toutes les qualités d'un corps qui varient avec

son état calorique peuvent fournir une méthode pyrométrique;
~~mais et tout de pour~~ ^{chaque méthode} définit une nouvelle échelle
de températures, incomparable aux autres. Les nombres obtenus
sont de simples numéros d'ordre marquant l'inégalité.
Les biatmosphère en degrés centigrades est un non-sens.

Noms et nombres.

Le nom est un signe associé à un objet ou à un phénomène,
et qui en est le représentant. La supériorité sur tous les
autres signes (naturels.) Son utilité dans la vie (nom propre).
Les nombres sont des noms, des signes d'ordre. Théorie
nominaliste de Heineholts-Kronecker. La suite des nombres
est un système de signes d'une application universelle. Les
propositions de mathématique sont des vérités d'expérience
(interne). On ne compte ~~que~~ les choses qu'en tant qu'égales
(sous un certain rapport) on les considère comme des unités.
Les degrés de température ne peuvent pas se remplacer (comme
les unités de potentiel.) Ils ne sont égaux que géométriquement, en
tant qu'accroissements égaux de volume ou de pression;
mais une température n'est pas la somme de ses degrés.

Le continu.

Dans tout intervalle fini il y a un nombre infini de différences
infinitement petites. — Le continu sensible, d'autre part, consiste
en un ensemble de quantités ou qualités qui diffèrent d'une
manière sensible, mais telles qu'on peut passer de l'une à l'autre
d'une manière insensible (le continu apparent peut être
réellement discontinu : stroboscope.) En appliquant la méthode
au continu on remplace l'appréciation sensible des différences
(sensible)

par une définition math. de celles-ci. L'unité et tous les nombres sont divisibles à l'infini; les irrationnels complètent le continu numérique. Mais de ce qu'on applique le continu numérique à un continu sensible, il ne s'ensuit pas que celui-ci continue des éléments correspondant à tous les nombres (ce serait conclure du signe à la chose signifiée). L'auteur ne trouve aucune difficulté dans l'infini, ni dans l'infiniment petit. Le Calcul différentiel ne s'occupe que de quantités finies, mais très petites.

Histoire de la théorie de la conduction de la chaleur

Hypothèses d'Amontons, Lambert, Franklin, Mayer.

Biot applique la loi de Newton au calcul de la conduction: dans l'état stationnaire d'une barre, chaque point reçoit autant de chaleur par conductibilité qu'il en perd au contact de l'air: or cette perte est prop. à l'excs de temp. Il trouve ainsi que, si la distance croît en progression arithmétique, la temp. décroît en progr. géométrique (1)

Fourier: Théorie analytique de la chaleur (1822)

Hypothèse (vérifiée par ses conséquences): 2 éléments voisins échangeant une quantité de chaleur prop. à leur diff. de temp. On considère une plaque infinie, à faces parallèles, de temp. u_1 et u_2 . Si l'état initial est une chute uniforme, il se conserve; sinon, il tend vers une chute uniforme de temp. La quantité de chaleur qui traverse la surf S par seconde est:

$$q = k S \frac{u_1 - u_2}{l} \quad (\text{flux de chaleur})$$

(1) Laplace a remarqué que cela suppose une distance finie entre les éléments du corps conducteur.

Dans une distribution de temp. continue, mais sans chute uniforme, l'élément de volume $s dx$ reçoit le flux différentiel

$$k s \frac{d^2 u}{dx^2} dx dt$$

Son accroissement de température est $\frac{du}{dt} dt$. Soit c la capacité calorifique, ρ la densité: on a l'équation:

$$c \rho s dx \frac{du}{dt} dt = k s \frac{d^2 u}{dx^2} dx dt$$

ou:

$$\frac{du}{dt} = \frac{k}{c \rho} \frac{d^2 u}{dx^2}$$

Equation analogue dans le cas d'un corps quelconque.

k est le coefficient de conductibilité interne.

Dans le cas d'un corps fini, il y a déperdition par la surface, prop. à l'écart de temp. sur le milieu ambiant.

$$q' = h s u$$

h coefficient de conductibilité externe (relatif au milieu)

Pour ramener ce cas à celui d'un corps illimité par la fiction suivante: il mène à l'intérieur du corps illimité la surface du corps considéré, et imagine qu'en ce point la chute normale de temp. est telle que le flux de chaleur qui y passe est égal au flux de chaleur dû à la déperdition.

$$-k s \frac{du}{dx} = h s u \quad \frac{du}{dx} + \frac{h}{k} u = 0$$

Le principe de l'homogénéité est dû à Fourier.

Fourier et Réclot ont cherché à déterminer k par expérience.

Cas d'une verge mince, avec déperdition latérale:

$$c \rho s \frac{du}{dt} dt = k s \frac{d^2 u}{dx^2} dx dt - h p dx \cdot u dt$$

p (périimètre de la section transversale)

ou:

$$\frac{du}{dt} = \frac{k}{c \rho} \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{h p}{k s} u$$

Pour avoir l'état stationnaire, il faut faire: $\frac{du}{dt} = 0$;

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{hp}{ks} u = 0$$

Intégrale: $u = Ae^{nx} + Be^{-nx} \left(n = \sqrt{\frac{hp}{ks}} \right)$

Conditions aux limites: $u = 0$ $u = U$
 $x = \infty$ $x = 0$

$u = Ue^{-nx}$ C'est la loi de Biot.

Forbes a déterminé k en valeur absolue: le flux de chaleur qui passe par une section de la tige en 1 seconde:

$$ks \frac{du}{dx}$$

est égal à la chaleur perdue par la partie ultérieure de la tige, qu'on mesure expérimentalement.

Fourier a fondé la méthode de la physique mathématique.

Problème des cordes vibrantes: Brook Taylor (1717), partant d'une déformation sinusoïdale de la corde, démontre qu'elle oscille suivant la loi du pendule.

$y = a \sin \frac{\pi x}{l}$ La force qui agit sur l'élément dx est: $p \frac{d^2y}{dx^2} dx = -py \frac{\pi^2}{l^2} dx$, donc prop à l'allongation y (p est la tension). Soit m la masse totale de la corde, la période est: $T = 2\sqrt{\frac{ml}{p}}$.

Taylor croyait que la loi sinusoïdale de vibration était la seule et finies ait par s'établir quelle que fût la position initiale.

D'Alembert montra au contraire que les lois de vibration sont aussi nombreuses que les positions initiales.

La force ~~élémentaire~~ élémentaire est représentée à la fois par $p \frac{d^2y}{dx^2} dx$ et par $\frac{m}{l} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} dx$

on a en gén. l'éq: $\frac{du}{dt^2} = \frac{pl}{m} \cdot \frac{du}{dx^2}$ ($\frac{pl}{m} = c^2$)

dont l'intégrale gén. est: $u = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$

Daniet Bernoulli concitoyen Taylor et D'Alembert en concevant la déformation initiale comme définie par une série de sinus (càd. comme une somme de vibrations harmoniques) qui se perpétueraient en vertu de la loi de Taylor.) Euler, doutant qu'on ait fait possible, considérait la loi de D'Alembert comme plus générale.

- Equations aux dérivées partielles. Eq. d'une surf. cylindrique

$$u = \varphi(y+ax)$$

Eq. diff:

$$\frac{du}{dx} = a \frac{du}{dy}$$

L'intégrale est une fonction quelconque de $(y+ax)$

Eq. d'une surf. de révolution: $u = \varphi(x^2+y^2)$

Eq. diff:

$$y \frac{du}{dx} = x \frac{du}{dy}$$

L'intégrale est une fonction indéterminée de (x^2+y^2)

De même, l'intégrale gén. de l'éq. diff. du 2^e ordre:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2 \frac{d^2u}{dx^2}$$

est:

$$u = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

φ et ψ étant 2 fonctions indéterminées, représentant 2 surfaces cylindriques à génératrice parallèle au plan xt et à directrice quelconque. Ce sont deux ondes qui se déplacent avec la vitesse $\pm c$ ($\frac{dx}{dt} = \pm c$). La double indétermination provient de ce que ni les elongations initiales ni les vitesses initiales ne sont données.

Intégrales particulières: $u = e^{\beta(x \pm ct)}$, $u = \cos \beta(x \pm ct)$
 $u = \sin \beta(x \pm ct)$, $u = \sin \beta x \cos \beta ct$, etc.

(1) Sauveur a découvert la coexistence des vibrations harmoniques (1701)

Toute fonction linéaire de plusieurs intégrales particulières est une nouvelle intégrale (Euler)

L'éq. diff.: $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$

a pour int. gén.: $u = \varphi(x+yi) + \psi(x-yi)$

— En supposant une distribution de temp. initiale:

$u = a \sin x$ linéaire

l'éq. de Fourier: $\frac{du}{dt} = m \frac{d^2u}{dx^2}$

donne: $\frac{du}{dt} = -m^2 \cdot a \sin x = -m^2 u$

L'int. gén. est: $u = A e^{-m^2 t}$ (valeur proportionnelle à la température)

(A val. initiale) $u = e^{-m^2 t} \cdot a \sin x$

Les températures tendent vers la temp. moyenne suivant une progression géométrique, en gardant une distribution sinusoïdale (elles ne s'égalisent qu'à la limite d'un temps infini). Plus généralement, si la distribution initiale est

$u = a_1 \sin x_1 + a_2 \sin x_2 + a_3 \sin x_3 + \dots$

la loi de variation des températures est l'intégrale:

$u = e^{-m_1^2 t} a_1 \sin x_1 + e^{-m_2^2 t} a_2 \sin x_2 + \dots$

Or Fourier a montré qu'on pouvait représenter une fonction quelconque (dans un intervalle fini ou même infini) par une série trigonométrique de la forme (entre $-\pi$ et $+\pi$):

$f(x) = \frac{b_0}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \dots$
 $+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots$

où les coefficients sont donnés par les formules:

$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin mx \, dx$ $b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx \, dx$

Exemples. La série: $\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + \dots$
 prend les valeurs: $+\frac{\pi}{4}$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{4}$ de $+\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{3\pi}{2}$, etc.
 Elle peut représenter la distribution initiale (uniforme) de la
 température d'un mur d'épaisseur l , en remplaçant x
 par $\frac{\pi x}{l}$. La loi de variation de cette temp. sera alors:

$$u = \frac{4u_0}{\pi} \left[e^{-\frac{m\pi^2 t}{l^2}} \cdot \cos \frac{\pi x}{l} - \frac{e}{3} \cdot \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{e}{5} \cdot \cos \frac{5\pi x}{l} - \frac{25m\pi^2 t}{l^2} \cdot \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right]$$

On voit que les cosinus de courte période décroissent plus
 rapidement; par suite, la distribution se rapproche de plus
 en plus de la distribution sinusoïdale (analogue avec les
 cordes vibrantes: les harmoniques disparaissent avant les on-
 fondamentales.) (de la théorie)

Retour sur le développement de la conduction de la chaleur.

La théorie de Fourier est un modèle de théorie physique: car elle
 repose, non sur une hypothèse, mais sur un fait d'expérience.
 La vitesse de variation de la temp. est prop. à leur différence;
 et elle en développe toutes les conséquences logiques.

Ce fait peut s'exprimer autrement: Chaque point tend à
 prendre la température moyenne des points environnants;
 et la vitesse de variation de sa temp. u est prop. à son écart
 sur cette moyenne $\left(\frac{du}{dx^2}\right)$ (figure géom. par la courbure
 des courbes qui figurent les variations de temp. autour du point).
 L'état stationnaire (régime permanent) correspond à:

$$\frac{du}{dx^2} = 0 \quad \text{ou:} \quad \Delta u = 0.$$

Généralité de l'équation de Laplace. Soit $u = f(x, y, z)$
 En un point voisin, $u = f(x+h, y+k, z+l)$. Soit $q(\sqrt{h^2+k^2+l^2})$

une fonction de la distance qui exprime l'influence du 2^e point sur le 1^{er}. La valeur moyenne de u au voisinage d'un point (x, y, z) est donnée par la fraction :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x+h, y+k, z+l) \varphi(\sqrt{h^2+k^2+l^2}) dh dk dl$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\sqrt{h^2+k^2+l^2}) dh dk dl.$$

En développant $f(x+h, y+k, z+l)$ en série de Taylor, les termes du 1^{er} degré en h, k, l disparaissent, par symétrie, il reste :

$$u + \frac{1}{2} \Delta u \frac{\iiint_{-\infty}^{+\infty} h^2 \varphi(\sqrt{h^2+k^2+l^2}) dh dk dl}{\iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\sqrt{h^2+k^2+l^2}) dh dk dl} + \dots$$

La fraction est une constante m qui ne dépend que de φ .

Pour la conduction de la chaleur, $m = \frac{2k}{c\rho}$. Ainsi la différence entre u et la moyenne est prop. à Δu . Tel est le sens phénoménologique de l'équation de Laplace, qui définit l'état stationnaire de la grandeur u .

- Théorie de la connaissance utilitaire et pratique.

Histoire de la théorie du rayonnement de la chaleur

Eshimbaum ⁽¹⁶⁹⁹⁾ a concentré la chaleur avec des miroirs et des lentilles. Scheele a nommé la chaleur rayonnante; Pictet ⁽¹⁷⁹⁰⁾ l'a distinguée de la chaleur propagée: il a découvert le rayonnement du froid. Hutton ⁽¹⁷⁹⁴⁾ identifie la chaleur et la lumière, tandis qu'Herschel ⁽¹⁸⁰⁰⁾ distingue les rayons calorifiques des rayons lumineux: il a découvert les rayons infra-rouges. Rumford ⁽¹⁸⁰⁵⁾ constate que les corps qui s'échauffent le plus vite se

refroidissent aussi vite, et admet des radiations chaudes et froides.
Leslie explore son cube avec un thermomètre différentiel à air : il constate que la chaleur rayonnée par une surface dans une direction est proportionnelle au cosinus de l'angle de cette direction avec la normale. Il remarque que le pouvoir émissif et le pouvoir réflecteur sont complémentaires.

Lambert (calcul la déperdition de chaleur d'après la loi de Newton : ⁽¹⁷⁷⁹⁾ $\frac{du}{dt} = -a(u - T)$ $u = T + (u_0 - T)e^{-at}$

Le corps est en même temps soumis à une source de chaleur :

$$\frac{du}{dt} = k(u - T) - a(u - T) \quad u = \frac{k}{a} - \left(\frac{k}{a} - u_0\right)e^{-at}$$

Lambert cherche une relation mathématique entre la tension de rupture d'un fil et la température de fusion du métal.

Il déduit l'impenétrabilité du principe de contradiction.

Prévoist distingue nettement le rayonnement de la conduction.

Tous les corps rayonnent, l'égalité de temp. entre deux corps résulte de l'équilibre mobile de leurs deux rayonnements.

La température de rayonnement dépend de la nature des 2 corps en présence.

Fourier (1816-17) déduit les lois du rayonnement comme conditions nécessaires de l'équilibre thermique : 1° proportionnalité de l'émission et de l'absorption ; 2° loi du cosinus.

Kirchhoff spécifie la loi de prop. de l'émission et de l'absorption en appliquant à chaque longueur d'onde séparément, et à la lumière polarisée dans divers plans.

La loi de Newton serait vraie si le pouvoir émissif croissait proportionnellement à la température. Dulong et Petit ont trouvé qu'elle n'est vraie que pour de faibles différences de température.

17

Pour une même diff. de temp., si la température initiale croît en progr. arith. la vitesse de refroidissement croît en progr. géométrique.

Claussius a démontré que le pouvoir rayonnant d'un corps dépend de l'indice de réfraction du milieu: il est en raison inverse du carré de la vitesse du rayonnement dans ce milieu (même quand les rayons sont réfléchis ou réfractés.)

Retour sur le développement de la théorie du rayonnement.

On a commencé par considérer le froid et le chaud comme deux espèces distinctes, et par admettre les rayons de froid et les rayons de chaleur. Mais le chaud et le froid ne sont pas symétriques. L'identité de la chaleur et de la lumière achève de détruire cette symétrie: le corps qui échauffe est aussi celui qui refroidit.

Prévost a remplacé la notion d'un flux unique de chaleur de A à B par l'idée de 2 flux contraires qui'échangent A et B. Cette idée est analogue à celle de la composition des mouvements simples & indépendants (Galilée). Récondite déductive du principe de l'équilibre de temp^{re}. due à la variété des circonstances de cet équilibre: d'où autant de postulats distincts du maintien de l'équilibre. C'est un bel exemple d'adaptation des idées aux faits.

Histoire du développement de la calorimétrie.

Richmann (1750) trouve la formule des échanges de chaleur entre deux masses d'un même corps:
$$U = \frac{mu + m'u'}{m + m'}$$
 Il confond encore température et quantité de chaleur.

Boerhave (1732) d'après les expériences de Fahrenheit, croit
 que les quantités de chaleur sont proportionnelles aux volumes.
Black ⁽¹⁸⁰⁴⁾ distingue la température et la quantité de chaleur,
 et conçoit la capacité spécifique des corps pour la chaleur.
 Il admet que dans un mélange la quantité de chaleur perdue
 par l'un des corps est égale à la quantité de chaleur gagnée par l'autre.
Lambert aussi avait distingué la masse de chaleur et la
 force extensive de la chaleur, mesurée par la température.
 Mais il considérait le calorique comme composé de particules.
Black découvre la chaleur latente de fusion de la glace, et
 la mesure par le temps que la glace met à fondre. Il explique
 l'expérience de Fahrenheit sur la congélation de l'eau refroidie
 au dessous de 0° , qu'Irving et Crawford expliquaient par
 la diminution de la chaleur spécifique de l'eau qui se congèle.
Lavoisier et Laplace (1780) ont employé la fusion de la glace à
 la détermination des chaleurs spécifiques. La méthode des
 mélanges comporte une cause d'erreur: le refroidissement du
 calorimètre. Courbes de la température u_2
 du corps et du calorimètre:



Rignault détermine empiriquement
 les portées de chaleur du calorimètre
 pour chaque température.

Dulong et Petit déterminent les
chaleurs spécifiques. Leur loi relative aux poids atomiques ⁽¹⁸²⁷⁾
Black découvre ensuite la chaleur latente de vaporisation
 et la mesure par le temps qu'une masse d'eau met à se vaporiser
 en bouillant (connaissance de la température de ébullition). Il

explique le phénomène de surébullition au surchauffe de l'eau.
La vapeur rend la chaleur latente en se condensant. Watt
détermina par là la chaleur latente de vaporisation.

Black considérait les gaz comme analogues aux vapeurs,
et par suite comme liquifiables. Ses idées sur la méthode.

Critique des concepts calorimétriques.

La définition ordinaire de la calorie enferme une faute logique.
Elle suppose le concept à définir (quantité de chaleur) et repose
sur la conception matérielle de la chaleur. Il faudrait mieux
définir arbitrairement, mais explicitement, la quantité de
chaleur par le produit mu (m poids, u variation de temp.)
Mais pourquoi appeler ce produit une grandeur?

- Renaldini voulait graduer un thermomètre en partant
de 2 temp. prises pour points fixes, et en prenant comme
moyenne la temp. du mélange de 2 masses d'eau égales.
Sauf que cette échelle calorimétrique est ée relative au
corps particulière pris pour véhicule de la chaleur.

L'échelle thermométrique étant autrement définie, il n'est
nullement évident que la temp. de un mélange de masses
égales doit être la moyenne des temp. initiales. et en fait,
cela ne peut être vrai avec deux substances thermométriques.

- Origine de la conception matérielle de la chaleur: comme
les corps s'échauffent aux dépens les uns des autres, la chaleur
semble passer de l'un à l'autre comme un fluide, dont la
masse serait constante. L'équation de Richmann:

$$mu + m'u' = (m + m') V$$

puut o théorie:

$$m(u - V) = m'(V - u')$$

ou:

$$m\theta + m'\theta' = 0$$

On peut appeler md quantité de chaleur sans donner à cette expression un sens matériel. C'est l'expérience seule qui nous apprend que cette quantité reste constante ^{ou} en passant d'un corps à l'autre (quand ces corps sont homogènes).

Dans le mélange de corps hétérogènes, l'équation n'est plus vraie. On pourrait abandonner la signification métrique de md. Black a préféré conserver le concept de quantité de chaleur (constante) en affectant l'un des corps (autre que l'eau) d'un coefficient s tel qu'on ait encore:

$$md + s'm'\theta' = 0$$

Enquêteur au lieu de Richman en considérant s'm'\theta' comme la quantité de chaleur gagnée par le corps de capacité s.

D'une manière plus abstraite et plus scientifique, on pourrait définir la capacité comme suit: Deux corps ont des capacités égales quand en raison inverse des variations de température qu'ils se communiquent:

$$\frac{ms}{m's'} = -\frac{\theta'}{\theta}$$

Mais alors il faut prouver que deux capacités égales à une même 3^e sont égales entre elles; ce qui paraîtrait évident quand on définirait la capacité par la quantité de chaleur nécessaire pour élever la temp. de 1°. Caly a aucune nécessité logique à cela; mais cela contredit les faits d'expérience ?

— On conçoit d'abord la chaleur spécifique comme une constante indépendante de la température. La fausseté de cette prescription a obligé à préciser la définition de la calorie en indiquant la température de où l'on part. Si la chaleur spécifique était la même fonction de la temp. pour tous les corps, on pourrait déterminer une échelle de températures pour laquelle la chaleur spécifique serait constante.

On pourrait aussi adopter l'échelle calorimétrique de Renaldini, mais les températures ainsi obtenues ne vérifieraient plus l'axiome de l'égalité, ce qui serait un bien plus grand inconvénient que la variation des chaleurs spécifiques avec la température.

Analogie du produit κD (κ capacité calorifique) avec le produit mécanique mv .

En somme, en dehors de toute représentation matérielle, le fait est que les produits de la forme $m\kappa D$ s'équivalent ou se compensent. On a modifié et compliqué le premier concept pour conserver la formule de l'équivalence (ou de la constance). On est ainsi amené à se demander ce que devient la chaleur perdue par fusion ou vaporisation, et à concevoir les chaleurs latentes. Mais rien n'oblige à considérer ces quantités comme des chaleurs: tout ce qu'on sait, c'est qu'elles équivalent à des quantités de chaleur qui disparaissent. (déterminées)

Propriétés calorimétriques des gaz.

Difficulté de déterminer la chaleur spécifique des gaz (à pression constante). Méthode de Delaroché et Berard (1813).
 Gay-Lussac découvre que tous les gaz ont la même capacité calorifique à volume égal, sous la même pression (1824).
 Regnault confirme les résultats de Delaroché et Berard, et trouve que la chaleur spécifique des gaz (rapportée au poids) est indépendante de la température et de la pression (pour les gaz qui suivent la loi de Mariotte). Il découvre l'énorme chaleur spécifique de l'hydrogène (3,4 par rapp. à l'eau).

Dalton remarque le réchauffement des gaz par compression, et leur refroidissement par détente. Rattribue une capacité moindre à l'air comprimé; et par suite une capacité plus grande au vide qu'à l'air.

Gay-Lussac (avec Laplace et Borthollet) constate qu'une masse d'air qui se détend dans le vide ne change pas de température; donc la chaleur spécifique ne dépend pas des variations de volume. On s'imaginait alors, sous l'influence de la conception matérielle de la chaleur, que le calorique était un fluide qui remplirait le vide plus que les corps, ceux-ci jouant à son égard le rôle de sponges. (Biot par ex.) On s'expliquait ainsi que la chaleur spécifique à pression constante fût plus grande que celle à volume constant. L'expérience de Clément et Desormes (1819) permet de déterminer le rapport $\frac{C_p}{C_v}$, et par suite γ . Mais le but de ces auteurs était de déterminer le zéro absolu et la chaleur spécifique du vide. C'est Laplace qui interpréta leur expérience par de manière à en tirer $\frac{C_p}{C_v}$ pour calculer la vitesse du son. Newton avait calculé cette vitesse, et avait trouvé la formule:

$$v = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}$$

(E_0 pression de l'air, ρ densité.)

La valeur calculée était plus faible que la valeur observée. Laplace (1816) montra que la force devrait être multipliée par γ , et par suite qu'il

$$v = \sqrt{\frac{C_p}{C_v}} \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}$$

Il indiqua cette méthode pour calculer le rapport $\frac{C_p}{C_v}$. C'est celle que Dulong a appliquée expérimentalement à divers gaz. Binet, supposant $\frac{C_p}{C_v}$ constant, démontre la relation:

$$pv^\gamma = \text{const.}$$

valable pour toute transf. adiabatique de un gaz. (1823)

Développement de la Thermodynamique. Principe de Carnot.

La théorie mécanique de la chaleur est fort ancienne (Huyghens) Lavoisier et Laplace en ont luide; ils y sont conduits par le principe de la conservation des forces vives (1780-4).

Rumford fait des expériences sur la chaleur dégagée par le forage des canons (1798). De ce que la quantité de chaleur ainsi produite est illimitée, il conclut en faveur de la théorie mécanique, contre la théorie matérielle.

Humphrey Davy a les mêmes idées; il produit la chaleur dans l'eau par le frottement d'une plaque de métal sur la glace.

Sadi Carnot (1824) adopte la théorie mécanique, car il invoque le impossibilité du mouvement perpétuel. Il maintient encore la constance de la quantité de chaleur. (La théorie matérielle n'exclut pas absolument la thermodynamique; on aurait pu admettre une chaleur latente pour le travail comme pour la vaporisation.)

Carnot considère le travail fourni par le passage d'une quantité de chaleur d'un état à un autre; et il se demande si ce travail dépend de la matière employée comme véhicule de la chaleur. Or s'il en dépendait, on pourrait avec deux machines thermiques différentes réaliser le mouvement perpétuel.

Il y a donc un travail maximum qui correspond à une chute déterminée de chaleur. Il est atteint quand toute variation de température est conditionnée par une variation de volume. Pour le déterminer, Carnot imagine son cycle réversible: le corps revient exactement à son état initial; il n'y a jamais contact entre corps de différentes températures, donc pas de perte de chaleur sans travail; enfin toutes les

variations de température correspondent à des variations de volume, donc à des travaux. Le cycle étant réversible, on peut faire remonter la même quantité de chaleur à la température primitive en dépensant le même travail.

Le travail W est donc fonction de la quantité de chaleur Q et des deux températures t_1, t_2 . (Remarque: Le cycle est idéal et réalisable car il demande au moins des différences de temp. infiniment petites, et par suite un temps infini. C'est un cas limite idéal. Et de processus réels irréversibles.)

Applications: La quantité de chaleur mise en jeu dans le passage de $p_0 v_0$ à $p v$ à temp. const. est la même pour tous les gaz parfaits. — Carnot calcule le rapport $\frac{Q_1}{Q_2}$. — Quand le volume d'une même masse de gaz varie dans le même rapport (à temp. const.) la quantité de chaleur mise en jeu est la même.

Carnot a calculé le travail correspondant à la chute de 1 calorie pour 1 degré, pour différentes vapeurs, et a trouvé des nombres passablement concordants. Enfin il compare les divers machines thermiques au p. dev. du rendement.

Clapeyron a vulgarisé l'œuvre de Carnot par son commentaire analytique et graphique (1834)

Représentation du cycle de Carnot. L'aire de la courbe mesurant le travail. Clapeyron croit que toute la chaleur empruntée à la source chaude est cédée à la source froide. Il a néanmoins l'idée de l'équivalence de la chaleur et du travail.

Clapeyron calcule le travail maximum: il prend le rapport du travail à la quantité de chaleur mise en jeu dans un cycle de Carnot, et le pose $= \frac{dt}{C}$, C étant une fonction de la température seulement (la même pour tous les gaz).

La chaleur latente de vaporisation des divers vapeurs à la même température est proportionnelle à $\frac{dp}{dt}$:

$$k = G \frac{dp}{dt}$$

La chaleur de compression de tous les corps à la même température est proportionnelle à $\frac{ds}{dt}$ (coefficient de dilatation).

$$dQ = -G dp \frac{ds}{dt}$$

Clapeyron a calculé la fonction $\frac{1}{G}$ au moyen des vapeurs. Il a trouvé des nombres voisins de celui de Carnot.

William Thomson (1848) a été conduit par la théorie de Carnot à inventer une échelle thermométrique absolue, c.à.d. indépendante de la nature du corps thermom.

D'après Clapeyron, la chute d'une quantité de chaleur de 1 degré ne produit pas le même travail à toutes les températures centigrades : la fonction $\frac{1}{G}$ va décroissant quand la temp. croît. W. Thomson choisit des degrés tels que le travail correspondant à une même chute de chaleur soit le même pour tous les degrés.

Il admet encore avec Carnot la constance de la quantité de chaleur, bien qu'il connaisse les travaux de Joule. Il ne conçoit pas la possibilité de convertir la chaleur en travail.

James Thomson (1849) remarque que l'eau en se congelant se dilate, et par suite peut fournir du travail sans chute de chaleur. Son frère James W. Thomson déduit du principe de Carnot que la pression abaisse le point de congélation de l'eau, de sorte que le travail effectué contre cette pression correspond à une chute de chaleur. James Th. calcule cet abaissement, W. Thomson le vérifie expérimentalement.



Développement de la Thermodynamique.

Principe de Mayer et de Joule. Principe de l'énergie.

Carnot, dans son Journal posthume, ne croyait plus à la constance de la quantité de chaleur, et avait l'idée de l'équivalence de la chaleur et du travail; il a même essayé de calculer l'équivalent mécanique. Il avait l'idée de la conservation de l'énergie (puissance motrice). Il est mort en 1832.

Séguin (1839) avait reçu de son oncle Montgolfier l'idée d'une identité de nature entre la chaleur et le travail; il savait que la vapeur qui travaille perd une partie de sa chaleur.

Dr R. Mayer, médecin de Heilbronn, conçoit l'équivalence de la chaleur et du travail, et détermine l'équivalent mécanique (1842). Colding, ingénieur en chef de Copenhague, arrivait en même temps à l'idée d'une proportionnalité entre la chaleur et le travail, et évaluait l'équivalent mécanique (1843). Il s'inspirait de l'idée métaphysique de l'indestructibilité des forces naturelles, et invoquait l'éternité du mouvement perpétuel. La même année (1843) Joule commençait ses expériences. — Reflexions sur la simultanéité de ces découvertes, et sur la validité des discussions de priorité.

Mayer est amené à sa découverte par la remarque que le sang veineux est rouge dans les pays chauds (à Java). Il était presque ignorant de Physique, et commettait des fautes grossières de mathématiques. Il avait formé lui-même tous ses concepts, d'où l'originalité de ses vues, presque inintelligibles pour les contemporains imbus des théories régnantes.

Il part de considérations métaphysiques sur les forces (et sur leur égalité nécessaire avec leurs effets) (Causa de motu seu indestructibilité).

Il conçoit sous le nom de force le travail ou l'énergie comme une substance, d'ailleurs immatérielle. Il s'est guidé par un instinct formel, par un besoin dont il ne se rendait pas compte lui-même.

Il a vu qu'il n'était pas besoin d'expériences nouvelles pour déterminer l'équivalent mécanique de la chaleur. Il a calculé au moyen de la différence entre C et c; ses données inexactes l'ont conduit au nombre 365; les données modernes donneraient 423,8.

Dans un 2^e article (1845), Mayer généralise l'équivalence de la chaleur et du travail, et la conservation de la force. Dans sa Dynamique du ciel (1848) il considère le soleil comme source de toute énergie, et émet une hypothèse mécanique pour expliquer cette énergie.

Mayer se distingue par l'originalité et la généralité de ses vues. C'est un homme de génie presque dénué de talent.

Helmholtz développe les idées de Mayer dans son livre Sur la conservation de la force (1847). Il les précise et les renforce de toute l'érudition physique qui manquait à Mayer. Il remplit le programme tracé par Mayer en appliquant à la Physique, à la Chimie et à la Physiologie son principe. Il se propose de tirer toutes les conséquences de l'impossibilité du mouvement perpétuel (comme Carnot). Constante de la somme des forces vives et des forces de tension. Equivalence mécanique de la chaleur. Equiv. vis des phén. électriques (Riess). Electrotyp. Travail des courants. L'aphén. thermo-électrique provient du phén. Peltier. Calcul de la force électromotrice d'induction magnétique.

L'impropriété du mot « force » est commune à tous ces auteurs.
Le mot « travail » introduit en Mécanique par Borelli (1686)
est employé seulement par Clausius (1850) et Thomson (1851).
Le mot « énergie » introduit en Mécanique par Th. Young (1800)
n'est employé au sens général que par Rankine et les Anglais.

Depuis 1840, Joule avait découvert sa loi de la chaleur voltaïque
et savait que la chaleur dégagée dans le circuit est égale à la
chaleur des transformations chimiques qui se effectuent dans le pile.
Mais il se demanda si c'était de la chaleur créée ou seulement
transportée par le courant. Pour trancher cette question, il
employa les courants d'induction, et vérifia encore sa loi.
Ainsi la chaleur peut être produite par le travail. Ensuite,
il inséra une bobine d'induction dans le circuit d'une pile,
et trouva qu'on peut augmenter ou diminuer à volonté du
courant en faisant tourner la bobine dans un sens ou dans l'autre
et par suite produire ou détruire de la chaleur mécaniquement.
C'est un 1^{er} moyen de valeur l'équivalent mécanique (1843).
Un 2^e consiste à échauffer l'eau en la forçant à passer dans
des tubes fins. — Joule invoque en faveur de l'équivalence
des raisons métaphysico-théologiques qu'il ne faut pas prendre
bien au sérieux. Ses préoccupations sont plutôt pratiques.

En 1845, 3^e ~~de~~ méthode pour déterminer l'équivalent
par la compression de l'air dans un calorimètre, le travail
étant calculé par la loi de Mariotte.

Joule en conclut que la capacité calorifique d'une masse d'air
ne dépend pas de son volume, et répète l'expérience de Gay-Lussac
détente d'une masse d'air dans le vide; un travail ni chaleur.
Inversement, il ~~encre~~ ^{évalue} l'équivalent par la détente d'une masse
d'air.

De 1845 à 1849, il détermine l'équivalent par les expériences bien connues sur le frottement des liquides.

Riem (Théorie mécanique de la chaleur, 1836) a trouvé que la vapeur perd de la chaleur en travaillant. En 1858, il publie sa détermination de l'équivalent mécanique par l'écrasement du plomb. Il étudie la transformation inverse de la chaleur en travail dans les machines à vapeur.

Il applique la thermodynamique à la Physiologie, en évaluant la chaleur qui correspond à un travail musculaire (positif ou négatif). Pour lui, le principe de l'énergie a un caractère rationnel et a priori. (1)

Développement de la Thermodynamique Union des principes.

Difficulté d'accorder ensemble les deux principes: La chaleur en produisant du travail se conserve-t-elle ou se dépense-t-elle? Et quand il y a chute de chaleur sans production de travail, comment le principe de la conservation de l'énergie est-il satisfait? W. Thomson en 1849 admettait encore l'hypothèse fondamentale de Carnot, ~~et~~ mais concevait la possibilité de l'abandonner pour résoudre les difficultés. Il ne considérait pas comme possible la transformation de chaleur en travail, bien qu'il connût par foule la transformation inverse. Il en appelait à l'expérience pour en décider; mais c'est Clausius qui trouva la conciliation des deux principes par une révision critique (1850).

Renouçant à l'hypothèse de Carnot (constance de la quantité de chaleur) il admit qu'une partie de la chaleur se transforme

(1) Conclusion: l'un des principes vient de Carnot tout seul, l'autre n'appartient ni à un seul homme ni à un seul pays.

entraîné (pr. de l'équivalence) et que le reste tombe à une temp. inférieure (pr. de Carnot) - En général, Clausius n'a pas apporté de principe nouveau; mais il a éclairci et systématisé logiquement la vérité découverte auparavant, en la déduisant des deux principes mathématiques formulés.

Définition des coefficients thermiques des gaz. Equation du principe de l'équivalence: $dQ = dU + A p dx$

On en déduit: $C - c = AR$ $pV^{\frac{C}{AR}} = \text{const.}$ (Poisson).
Selon Carnot, le travail du cycle est: $W_{\text{Carnot}} = F(Q, t_1, t_2)$

ou: $W = Q \cdot F(t_1, t_2)$

Selon Joule-Mayer, $W = JQ'$

Donc: $JQ' = Q \cdot F(t_1, t_2)$

Q est la chaleur cédée par la source chaude; $Q - Q'$ est la chaleur reçue par la source froide.

La fonction de Carnot (Capeyron) est: $C = AT$.

W. Thomson a cherché d'abord à calculer le travail correspondant à la chute d'une quantité de chaleur, mais en supposant que la quantité de chaleur passe tout entière de la source chaude à la source froide, ce qui était faux et vicie son résultat.

En 1851, il corrige sa théorie, et pose en principe qu'il est impossible de produire un travail, avec des corps inorganiques, en refroidissant un corps au-dessous de la temp. minima de son entourage. C'est une autre forme du principe de Carnot-Clausius. Il trouve l'équation:

$$\log \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{J} \int_{T_2}^{T_1} \mu dt$$

Il faut la fonction $\frac{1}{C}$ / rapport de dW à dQ , fonction de t_2

D'après les recherches de Joule, Thomson trouve pour les gaz:

$$\mu = \frac{J}{T}$$

L'équation précédente donne:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad (1)$$

d'où:
$$W = JQ_1 \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1} \right)$$

Ainsi il n'y a jamais qu'une partie de la chaleur qui puisse être convertie en travail; le reste est perdu (dégradié) sans retour. Thomson en conclut la tent d'un universelle de la nature à la dissipation de l'énergie mécanique (1852)

La quantité d'énergie dissipée dans une transformation est $\int \frac{dQ}{T}$ (= 0 dans un cycle réversible)

Clausius est arrivé peu après aux mêmes résultats (1854)

Il a donné que toute ~~chaleur~~ transformation de chaleur en travail s'accompagne nécessairement d'une chute de chaleur; il cherche les valeurs équivalentes de ces 2 transformations. Soit Q la chaleur transmise, Q' la chaleur transformée en travail:

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

ou:
$$\frac{Q'}{Q + Q'} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (\text{coefficient économique}).$$

La valeur équivalente d'une quantité de chaleur Q est $\frac{Q}{T}$.

On a toujours: $\int \frac{dQ}{T} \geq 0$ (= dans un cycle réversible)

Dans le cas d'une transformation réversible (2) $\int \frac{dQ}{T} = dS$ différentielle exacte. S est l'entropie. (Gibbs)

Une transformation adiabatique (Rankine) est isentropique

Dans toute transformation irréversible, l'entropie augmente;

il y a une perte d'énergie qui ne peut être compensée.

L'énergie du monde est constante; son entropie tend vers un maximum.

(1) Cette proportion est la base de la température absolue (1854)

(2) On suppose que les corps qui se touchent sont à la même température.

Analogie de l'entropie avec la température: c'est un
niveau, une caractéristique de l'état des corps.

Application de la Thermodynamique à l'électricité:
Thomson (1851, 1854) Clausius (1852, 1853) Explication
de la loi de Joule, du courant thermo-électrique (par le phén.
Peltier) Découverte de l'effet Thomson.

Rankine (1851-53) contribue à édifier la Thermodynamique.
- En résumé, les travaux de Thomson et de Clausius sont
équivalents, et leurs mérites égaux; mais Thomson est plus
clair et plus direct, Clausius est formaliste et compliqué.

Résumé des principes de la Thermodynamique

En faisant subir à un gaz un cycle de Carnot entre 2 temp.
infinitésimales voisines, on a: $W = R dt \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v}$

~~et le travail~~ $Q = \frac{RT}{J} \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v}$

d'où: $\frac{W}{Q} = \frac{J dt}{T}$ Or: $W = J dQ$

$\frac{dQ}{Q} = \frac{dT}{T}$ d'où: $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$

Tous les faits d'expérience sur lesquels repose la thermodynamique étaient acquis du temps de Carnot. S'il avait
~~possédé~~ l'expérience de Gay-Lussac, il aurait pu construire
toute la thermodynamique (à la lumière du principe de l'équivalence).

Échelle de température absolue (thermodynamique)

Pour un gaz qui suit exactement la loi de Mariotte, Gay-Lussac,
la température absolue coïnciderait avec la température
de Amontons ^{mesurée par} ~~thermomètre~~ la pression du thermomètre à air.
Mais en fait, le travail intérieur des gaz n'est pas nul, c'est-à-dire

que leur chaleur spécifique est pas indépendante du volume. Soit μdt le rapport du travail à la chaleur dans un cycle inf. mince de (températures arbitraires; μ , fonction de Carnot, à déterminer ^{établie} par expérience); on a:

$$\frac{T dQ}{Q} = \mu dt$$

On posera, par définition: $T = \frac{J}{\mu}$,
et l'on aura: $\frac{T dQ}{Q} + \frac{T d\mu}{\mu} = 0$

d'où: $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{T_1}{T_2}$.

Thomson et Faulk ont déterminé μ par expérience, en faisant passer de l'air sous pression à travers un bouchon poreux: il y a un léger refroidissement qui ~~pro~~ vient de ce que la chaleur due au frottement (càd au travail effectif) ne compense pas tout à fait le refroidissement dû à la détente; ce qui prouve qu'il y a un travail intérieur de dilatation (1852). Ils ont ainsi comparé les températures absolues aux indications du thermomètre à air, à volume constant, qui suppose à 0° la pression de 760^{mm}; ils ont trouvé en faisant coïncider 0 et 100, ils ont trouvé des différences en plus de $\frac{1}{4}$ centièmes au plus entre 0 et 100, et de $-\frac{1}{4}$ dixièmes au plus vers 300°.

Retour sur le développement de la Thermodynamique.

Les sources du principe de l'énergie.

Une foule de ^{travail} phénomènes physiques et chimiques peuvent être produits indépendamment du travail. Si la transf. ^{inverse} ^{elles fournissent un} ^{sous-réversible} travail égal; ~~et~~ ^{est} le principe de la conservation de l'énergie, au sens gén (énergie = ce qui équivaut à du travail).

Le principe a une triple racine: logique, formelle, expérimentale.
Il a paru évident a priori à bien des auteurs (Mayer, Joule).
Il reposait sur la conception mécaniste du monde, qui aboutit
à nier la réalité du monde sensible et à en faire une énigme.
Les phén. physiques ne s'expliquent pas par les phén. mécaniques,
mais ils peuvent se représenter par eux, grâce à leur analogie.
C'est l'expérience seule qui a montré l'équivalence de la chaleur
et du travail, et a permis d'évaluer l'équivalent.
Mais le principe répond aussi à un besoin formel de l'esprit
(surtout chez Mayer), le besoin de se figurer substantiellement
les phénomènes. De la proportionnalité de la chaleur et du
travail on conclut à leur identité de nature, puis à la constance
de leur somme, considérée comme une substance.
Il ne faut pas croire que la découverte de ce principe ait prouvé
que la chaleur n'était pas une matière, mais un mouvement.
Dans toute loi physique on peut trouver une équivalence
qui peut se formuler comme la constance d'une substance
(ex: $v = \sqrt{2gh}$). Il n'y a pas d'équivalent mécanique de la
masse électrique, mais bien de l'énergie électrique; on aurait
pu appeler celle-ci masse, et poser en principe la conservation
de la quantité d'électricité. Inversement, il vaudrait mieux
dire « énergie calorifique » que « quantité de chaleur ».
C'est la même illusion substantialiste qui nous fait regarder
O et H comme substantiels dans l'eau.
Le principe de l'énergie est analogue à l'impossibilité
du mouvement perpétuel (présomption antérieure à la
fondation de la mécanique, et qui a servi à la fonder).
C'est en est l'extension à toute la Physique, avec la substan-
tialisation du travail et des quantités équivalentes. C'en est

pas une loi ou un fait nouveau, mais une forme de conception,
de faits antérieurement connus. Rien de myotique.

Extension du principe de Carnot - Clausius.

Conformité et différences des énergies. Limites du
principe de l'énergie.

L'élaboration de la connaissance est réglée par la loi d'économie :
on rapporte toujours les nouveaux faits aux anciens concepts.
Carnot a été guidé par l'analogie de la chute d'eau.

Romex a représenté le cycle de Carnot par un processus
de masses pesantes : $\frac{Q}{I}$ est pour lui le poids de la chaleur.

On peut imaginer une figuration hydrostatique, où le
niveau figure la température.

On peut aussi imaginer une figuration électrique, la tempé-
rature étant figurée par le potentiel. Enfin, quand une
énergie W tombe du niveau V_1 au niveau V_2 , l'énergie
 W' se transformant en de autres formes, on a l'équation :

$$-\frac{W'}{V_1} + W\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = 0$$

$$\text{ou : } -\frac{W_1}{V_1} + \frac{W_2}{V_2} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} W_1 = W + W' \\ W_2 = W \end{array} \right)$$

et le coefficient économique est $\frac{W'}{W+W'} = \frac{V_1 - V_2}{V_1}$.

La considération du cycle réversible ^{accessoire}, elle est
destinée à évaluer le travail maximum W' qui correspond à
une chute de chaleur. La quantité $\frac{W}{V}$ est la valeur
équivalente de l'énergie W au niveau V : la somme des
quantités $\frac{W}{V}$ reste constante.

Le principe de Carnot vaut donc pour toutes les formes
d'énergie ; mais elles présentent des différences. La chaleur est

énergie qui puisse descendre de niveau sans produire de travail
ni d'autre énergie équivalente. Pour toutes les autres, une
transformation est nécessairement liée à toute chute d'énergie
(les deux principes de la Th. ne sont donc pas nécessairement
impliqués l'un dans l'autre, bien qu'ils expriment deux faits
inséparables d'un seul et même processus.) Ainsi l'entropie
d'un système ne croît que dans le cas de la chaleur (N. B.
Ne pas la confondre avec $\sum \frac{Q}{T}$, somme des capacités, qui reste
constante.)

Autre différence: la chaleur est la seule énergie dont le zéro
ne soit pas arbitraire, parce que les phén. dépendent des tempé-
ratures absolues (ex: la pression, la fusion, la vaporisation)
et non pas seulement de leurs différences. Cela veut par dire
qu'il ne puisse s'effectuer du travail au-dessous du zéro absolu.
L'équivalence des énergies n'a rien de surprenant ni de mystérieux.
Les notions mécaniques, formées les premières, ont servi de modèles
aux notions physiques (ex: masses électriques, potentiels électriques).
La conception de la chaleur comme énergie tient au hasard
heureux qui fait que la capacité calorifique des gaz varie peu avec
la temp., et que les températures sont proportionnelles (sensiblement)
aux pressions, de sorte que la quantité de chaleur correspondant
à un degré est à peu près prop. à l'énergie calorifique, c'est-à-dire
au travail du gaz. Il y avait une coïncidence approximative entre
les températures usuelles et les températures absolues.

La conformité des énergies vient par une loi de la nature, elle
provient de l'uniformité de nos conceptions. Le concept de
substance s'impose à notre esprit: or il ne peut s'appliquer
qu'aux relations ou lois des phén., seules permanentes. Il
s'exprime math.² par la constance d'une somme: toute

l'équation peut être ramenée à cette forme (ex: loi de Mariotte.)
 Pour maintenir cette constance, Black admettait des
 chaleurs latentes; nous admettons des énergies équivalentes.
 De même pour le principe de l'entropie; Clausius a
 choisi tout exprès la valeur équivalente $\frac{Q}{T}$, parce que
 $\sum \frac{Q}{T} = 0$ dans un cycle réversible, où la chaleur
 produit tout son effet mécanique, sans perte aucune.
 Dans le phén. des mélanges, c'est au contraire la somme
 des quantités de chaleur échangées ($\sum Q$) qui est constante (= 0).
 Ainsi toutes ces constantes sont relatives à certains
 ordres de phén. et les principes correspondants n'ont
 que pour ceux-ci. On ne peut pas leur attribuer une valeur
 générale et illimitée. L'énergie et l'entropie de l'univers
 n'ont pas de sens: ce ne sont pas des grandeurs mesurables.

Le domaine frontière de la Physique et de la Chimie.

James Thomson (1873) a distingué les trois états ou phases
 (Gibbs) d'un corps, comme l'eau. Coordonnées p, t :
 il y a une courbe qui sépare l'état liquide de l'état
 gazeux; c'est la courbe des tensions max de la vapeur.
 Une autre courbe sépare l'état solide de l'état liquide:
 c'est la courbe des points de congélation (variables suivant
 la pression). Enfin une 3^e courbe sépare l'état solide de
 l'état gazeux: elle part du point d'intersection des 2
 premières, mais ne coïncide pas avec la 1^{re} comme l'a cru
Regnault: cela résulte du principe de Carnot.

Problème de la force électromotrice des piles. L'équivalence
 de la chaleur voltaïque et de la chaleur chimique (Thomson).

Heinkel) n'est vrai que pour les piles qui ne s'échauffent ni ne se refroidissent (Daniell.) En tout cas, on peut employer un cycle réversible et lui appliquer le principe de Carnot.

Le travail maximum (correspondant à un cycle réversible) est pour Heinkel une perte d'énergie libre: $U = W - Q$.
 W travail effectué par le système, Q chaleur reçue pendant ^{un} cycle transf. réversible. En vertu du principe de Carnot. $\frac{dW}{Q} = \frac{dT}{T}$
d'où: $W - U = T \frac{dW}{dT}$

Énergie libre $F = -H$ fonction caractéristique de Massieu:
 $H = TS - U$ $S = \frac{\partial H}{\partial T}$, $p = \frac{\partial H}{\partial V}$

Rapport des processus physiques et chimiques.

Loi de sérendipité à la Physique, la Chimie, science plus générale et plus complexe, englobera peut-être un jour. De même la Physique ne réside pas à la Mécanique: mais les lois mécaniques sont des cas particuliers & simples des lois physiques.

Les phén. physiques n'altèrent qu'une partie des qualités des corps; Les phén. chimiques les altèrent toutes ensemble. S'il y a un potentiel chimique (niveau), il est discontinu, car les phén. chimiques ~~sont~~ s'effectuent entre des masses discrètes et entre des états discrets: c'est même cette discontinuité qui est le fondement de la hypothèse des atomes (simple image qu'il ne faut pas prendre au sérieux). Le potentiel chimique est peut-être une multiplicité à plusieurs dimensions, ce qui n'est pas étonnant ni exceptionnel dans la science. Les phén. chimiques sont plus profonds que

les phén. physiques, car ils suppriment les équations auxquelles obéissent ceux-ci, et les remplacent par d'autres.

Toutes nos sensations sont liées à des phénomènes chimiques, même nos sensations d'espace (!) On arrivera peut-être à découvrir les propriétés de l'espace par la Chimie (!!)

L'action à distance ne distingue pas les phén. physiques des phén. chimiques.

Opposition entre la Physique mécanique et phénoménologique.

Les hypothèses métaphysiques (cà d. imaginatives) doivent servir de moyens de recherche, mais être exclues du résultat des recherches. Leur utilité historique ne prouve pas leur vérité; les analogies mécaniques ne prouvent pas l'identité. La mythologie mécanique se réduit à une mythologie algébrique. Pourtant bien des savants ont été dupes de leurs propres fictions. Quand Boltzmann a découvert l'identité du principe de Carnot et du principe de la moindre action, il n'a fait que répéter l'analogie connue entre la chaleur et le travail, mais n'a nullement prouvé que la chaleur soit une force vive. De même, quand on essaie de réinterpréter mécaniq. le 2^e principe de la Th., ce n'est que par les hypothèses moléculaires qui confirment le principe, mais au contraire (Wald, die Energie, 1889.)

Le développement de la science.

Conception utilitaire et pratique de la science: a pour but la conservation et l'amélioration de la vie humaine. Division du travail; méthodes économiques. Le but de la science est de construire une image du monde, la plus étalée possible.

Le sens du merveilleux.

La science commence par l'observation de phénomènes nouveaux, insolites, imprévus, qui sollicitent une explication. Aussi est-elle liée à l'origine à la magie, à la sorcellerie, à l'agathéologie, explications anthropomorphiques, fétichisme (il en subsiste des traces dans la science moderne). Assimilation du sauvage à l'enfant. Extension illégitime de la personnalité à tous les agents naturels. Darwin a montré que des ^{consciences} habitudes utiles à l'origine persistent, et peuvent devenir nuisibles. Ainsi le berwin du merveilleux subsiste chez certains savants: critique du spiritisme, de l'homéopathie. Éloge de l'ascience et des véritables miracles qu'elle opère. — L'observation du merveilleux n'est que le 1^{er} stade; il faut le réduire et l'expliquer; hanteur, caille les expériences de suggestion & d'occultisme. Les obscurantistes n'ont pas le droit d'invoquer les lacunes de la science pour y introduire leurs fantaisies; la science seule peut combler ses propres lacunes. Elle consiste à montrer que le merveilleux n'est pas merveilleux. La croyance à l'existence de l'agent électrique comme substance, en dehors des phénomènes, est encore du mysticisme.

Transformation et adaptation des idées en Physique.

On peut appliquer aux sciences les lois de l'évolution formulées par Darwin pour les organismes. L'antithèse apparente de l'hérédité et de l'adaptation se résout par la tendance de chaque organisme vers un état d'équilibre stable (comme les systèmes physiques, selon Boltzmann). Le principe de stabilité réconcilie le principe de permanence et celui de changement.

L'adaptation de nos idées aux faits, à mesure que croît
notre champ d'expérience, s'explique par l'association.
Elle garantit nullement la valeur objective de nos
prophéties, surtout quand elles dépassent le champ de
notre expérience actuelle. Quand notre champ s'étend,
des nouveaux faits entrent en conflit avec nos habitudes
de pensée, d'où conflit, qui aboutit à l'adaptation de
celles-ci à ceux-là : exemple : progrès des idées sur la
gravitation. C'est le processus général de l'évolution
biologique (ex. empruntés aux animaux). Cela nous
explique que les anciens facons de penser persistent si
obstinément, et s'imposent aux faits nouveaux avec
tyrannie : Mais luttent pour la vie. Toute ~~exp~~ hypothèse
consiste à se représenter les faits nouveaux sous la forme
de faits anciens plus connus, c'est plus habituels. La
naissance des théories n'est pas l'œuvre d'une méthode
savante, mais d'un instinct de conservation. Toutes
les méthodes de St. Mill se réduisent à la méthode de
variation, qui entraîne la comparaison, et par suite
l'adaptation, soit des idées aux faits, soit des idées entre
elles (dans tous les ordres de pensée). Bien des découvertes
ne sont que la généralisation d'une loi, étendue par
habitude ou par énoncé en dehors de son domaine.
Selon Whewell, les deux facteurs essentiels de l'évolution
scientifique sont les idées et les faits. On cherche à
ramener les faits nouveaux à des faits déjà connus, et
on obtient d'accorder les anciennes notions aux faits
nouveaux. De cette lutte et de ce compromis, naît la science.
Le progrès scientifique n'est qu'une face de l'évolution organique.

L'économie de la science.

Les méthodes de la science obéissent au principe d'économie. La représentation scientifique du monde est celle qui économise le plus les forces intellectuelles. Réponse aux objections de Petzoldt: dans la nature, c'est le principe de stabilité qui régit, par lequel il n'y a pas de choix; mais au point de vue de la finalité, la considération de l'économie garde sa valeur (Ex: rendement d'une machine thermique). Réponse à Carus.

La comparaison comme principe scientifique.

Adaptation se fait par la comparaison des nouveaux faits aux anciens. La comparaison est la condition du langage, par lequel l'expérience se conserve et se transmet. Par la comparaison les noms prennent un sens abstrait, deviennent des concepts. L'analyse verbale d'un phénomène au moyen de concepts connus en est la description directe.

La description indirecte consiste à assimiler le phénomène à un autre déjà connu. Telles sont toutes les théories ou idées théoriques. Comme toute analogie implique différence, une théorie est à la fois utile et inutile, et toujours précaire, car elle ne donne qu'une description partielle et incomplète. (Ex: émission, ondulations.) On commence par supposer des esprits ou des forces (reste de fétichisme), puis des matières ou substances (calorique), enfin on se contente de la description directe, la seule fidèle, exacte et complète. Mais il est bien difficile de commencer par la description directe: on compare forcément le nouveau au connu (courants de liquide, de chaleur, électriques, magnétiques.) Il y a des analogies réelles qui fondent une physique comparée, pure phénoménologique sans hypothèses. L'explication scientifique n'est qu'une description

Le langage.

La question de l'origine du langage est mal posée: il s'agit de savoir comment le langage animal a évolué pour devenir le langage humain. Car les animaux ont un langage, comme ils ont une intelligence rudimentaire. Les signes vocaux sont d'abord associés instinctivement à des phénomènes ou à des actions, puis employés volontairement pour les désigner. Le langage suppose une activité commune, donc une société. Il s'étend ensuite au-delà du domaine pratique et arrive à exprimer les idées abstraites. Utilité du langage pour la pensée: c'est malgré le langage, on arrive à manier les mots sans penser à leur signification. Mais le langage n'est pas nécessaire à la pensée intuitive et concrète, qui procède par images. La pensée scientifique, qui a souvent pour but de former de nouveaux concepts, ne peut pas être verbale.

Le concept.

Le concept est une impulsion motrice qui nous porte, soit à éprouver, soit à construire un objet. Les concepts constructifs dominent au stade. Les concepts d'épreuve en Physique. Ils suppriment des habitudes d'activité ^{mus} ~~mus~~ ^{acquies par un long} ~~exercice~~. Le concept est une ^{réaction identique} ~~manière de réagir~~ ^à des excitants différents (comparaison avec les animaux) ~~qui ne consiste pas dans~~ ^{un langage vague qui l'accompagne} mais dans un ensemble d'impulsions musculaires précises (ex: opérations arithmétiques). Conciliation du réalisme et du nominalisme: la généralité du concept n'est pas physique, mais physiologique. Les réactions qui constituent le concept deviennent inconscientes, mais qui dictent et déterminent notre pensée à notre usage.

(1) Les réactions sont moins nombreuses et variées que les stimulants.

Le concept de substance.

Substance = ce qui est absolument permanent dans les phénomènes. Tout corps semble une substance, surtout au toucher (les sensations tactiles variant moins que les autres). Mais comme toutes les qualités sensibles d'un corps varient, on conçoit sa substance comme un noyau supra-sensible. Le consentement universel ne prouve nullement l'existence de la substance. Le concept de substance devient quantitatif: c'est la matière, considérée comme constante: on cherche toujours à rendre la somme de matière constante. La masse n'est pas la quantité de matière (Newton) mais une des propriétés mesurables des corps. Le concept de substance s'affine et se subtilise: fluides étheriques, âmes (notions fétichistes). Clausius a cru à tort que le progrès des sciences consistait à réduire tous les fluides à un seul. L'atomisme est une hypothèse substantiériste inutile. On tend de plus en plus à réduire les hypothèses substantiéristes aux faits qu'elles sont le noyau, par ex. à la constance de telle ou telle quantité. Il n'y a qu'une chose permanente dans l'univers, ce sont les relations entre les phénomènes, exprimées par des équations.

Causalité et explication.

La causalité mécanique n'est pas plus claire que la causalité psycho-physique (Hume) et pourtant celle-ci a servi de modèle à celle-là parce qu'étant plus fréquente elle semble mieux connue. Mais le concept de cause a-t-il une origine animiste, fétichiste? L'explication d'un fait n'est rien de plus que sa description: toutes les hypothèses qu'on peut imaginer pour l'expliquer (fluides) ne nous apprennent rien de plus. Quand on assimile un processus

à un autre plus connu (plus fréquent) on croit l'avoir capturé ; on n'en a donné qu'une description indirecte. Un phénomène est clair quand on le reconstruit à l'aide d'éléments simples et généraux. La connexion causale n'est nécessaire que dans notre esprit ; c'est l'expérience seule qui nous apprend si nos prévisions se réalisent. Il n'y a qu'une nécessité logique (subjective) mais pas de nécessité physique (objective.)

Correction de vues scientifiques par des circonstances fortuites.

Les faits nouveaux, propres à modifier nos idées et à provoquer une nouvelle adaptation, ne sont naturellement ni prévus ni produits par nous : c'est ce qu'on appelle hasard. La plupart des découvertes scientifiques (Galvani, Malus, Röntgen) et des inventions techniques et pratiques sont dues au hasard. Dans l'art aussi, les combinaisons fortuites ~~et~~ inspirent l'artiste. Le résultat dépend aussi de la capacité d'adaptation de l'esprit, très inégale parmi les hommes et les espèces animales. Les inspirations fortuites, les éclairs du génie doivent être préparés par un long et assidu travail destiné à retourner le problème sous toutes ses faces (~~et~~ témoignage de Nikola Tesla).
Note sur le travail inconscient dans le sommeil et le rêve.

Les méthodes de recherche.

La première condition de toute découverte est l'intuition, soit des faits, soit des rapports abstraits. Les sens étant des

(1) L'avantage de la Physique sur la Chimie et la Biologie, est d'avoir pour objet des faits homogènes et continus, ne différant qu'en quantité, et permettant des descriptions très générales qui constituent les lois et les théories.

instruments imparfaits, on les remplace par des mesures, et on ne les emploie plus qu'à constater l'égalité ou l'inégalité. Les vérités mathématiques sont intuitives et empiriques. ~~Cependant~~ Thalès et Pythagore ont dû trouver leurs théorèmes par de nombreuses expériences & comparaisons. Par la différence essentielle entre l'induction & la déduction: ce sont les mêmes intuitions, dans un ordre différent (analytique ou synthétique) suivant qu'on découvre ou qu'on démontre. Par la différence entre le raisonnement et l'expérimentation: le mathématicien fait des expériences sur ses concepts. (Gauss a dit, ironiquement, que le physicien n'expérimente jamais que sur ses pensées.)

La science est née des besoins de la vie pratique; parente de la science et de l'industrie: le théoricien cherche la solution idéale d'une difficulté intellectuelle, le technicien, la solution matérielle d'une difficulté pratique. C'est le besoin pratique qui engendre l'abstraction: dans un fait, nous ne considérons que ce qui nous intéresse, nous l'abstraissons. Il nous paraît à substituer à la réaction R qui n'est pas toujours possible un système de réactions A, B, C, \dots qui sont plus faciles à réaliser. Quand la correspondance entre deux systèmes de réactions est univoque, ils sont équivalents. (Mann) Enfin le besoin pratique conduit à chercher les schémas les plus simples et les plus généraux; les schémas arithmétiques sont les plus commodes, car ils ne dépendent que de notre activité ordonnatrice. Ils reposent sur des expériences internes, indépendantes des expériences physiques, et dont l'accord avec les phénomènes n'est connu que par expérience. Il n'en faut pas

dire que l'arithmétique impose ses lois à la nature.
 L'avantage des vérités math. est d'être données dans une
 seule intuition, de sorte que le contraire est inimaginable
 (simple et indissoluble).
 La Géométrie est une physique de l'espace. Mais comme
 l'espace sensible n'est pas l'espace géométrique, mais il lui
 correspond; c'est pourquoi on peut résoudre les problèmes
 géométriques par l'imagination. Les notions géométriques
 sont comme les notions physiques, des concepts idéaux,
 et les propositions ne sont vraies qu'approximativement,
 dans la mesure où la réalité ressemble à cet idéal.
 Pas plus d'axiomes en Géométrie qu'en Physique. Pas de
 nécessité physique, mais une simple nécessité logique (de
 l'enchaînement des idées) avec la croyance (ou l'habitude)
 au parallélisme des faits et des calculs.

Les relations quantitatives sont plus simples et plus
 générales que les qualitatives: elles comportent une
 précision infinie. Quand on peut résumer une table
 numérique (valeurs correspondantes d'un variable et d'une fonction)
 par une formule de calcul, on a une loi: c'est une image
 plus ^{et plus commune} simple des phén. mais qui ne contient rien de plus que
 l'énumération des cas particuliers (loi de la réfraction).

- Facultés diverses nécessaires pour la recherche; se trouvent
 réunies ou séparées chez les grands inventeurs. Exemples.
Le but de la recherche.

Une théorie parfaite n'est pas l'assimilation d'un ordre
 de faits à un autre, mais la description complète et systé-
 matique des faits. Les théories dans le premier sens ne sont

que des moyens d'approcher de l'idéal (théorie au 2^e sens)
Celle-ci contient plus que toute spéculation, car elle dépouille
les faits de toute addition étrangère & superflue de l'imagination.
C'est un inventaire, aussi simple, commode et économique
que possible, auquel toutes les explications n'ajoutent rien
au contraire. L'art est atteint quand le catalogue ou tableau
des faits se résume en formules à la fois générales et précises
(logarithmes de Lagrange, de Fourier) Les lois générales de
la nature s'expriment ~~par~~ ^{résident dans} le minimum (Ricciardi)
et par suite s'expriment par des équations différentielles
(les intégrales ne représentent que les cas particuliers)
Caractère logique et esthétique de l'unité qui en résulte.

Critique de Mach:

Son ouvrage contient tout ce qu'il faut pour réfuter l'évolutionnisme, dont il adopte la logique et la psychologie. Car quel est le nœud de l'évolutionnisme sinon le principe de la conservation de l'énergie généralisé sans limites et étendu dans les sens substantialiste et fétichiste qu'il condamne? Son esprit vaut mieux que sa doctrine.

Contre les spiritistes, il a cent fois raison de se moquer de leurs « expériences » et de leur reprocher leur manque d'esprit critique. Mais il est assez mal fondé, au point de vue empiriste, à leur adresser ces reproches: car il n'admet aucun principe rationnel qui puisse limiter le champ de l'expérience possible et permettre de dire d'affirmar a priori que tel fait est absurde et impossible.

La letort (comme Bouasse) de prendre les symboles de l'imagination pour des hypothèses métaphysiques. Ce sont les évolutionnistes qui seuls sont dupes de ces symboles et les érigent en hypothèses métaphysiques. Il parle comme les philosophes du XVIII^e siècle, dont il partage la philosophie nominaliste, empiriste & simpliste: la horreur de l'obscurantisme, du mysticisme et de toute métaphysique. Peut-être se justifie-t-elle en partie par un état politique et social analogue à celui du XVIII^e s. Confiance naïve dans l'histoire de la civilisation, l'ethnographie, les récits des voyageurs &c. Croit à l'Urmensch, à l'homme de la nature.

Opposer à sa conception pratique et utilitaire de la science
les conclusions de l'artiste de Milhaud. Analogie avec
la morale: on ne trouve la vérité utile que lorsqu'on ne cherche
pas l'utilité.

La conception utilitaire des sciences rappelle Bergson.
La théorie épicurienne de la science a été faite par Renouvier.
Le principe de «l'inertie» et de moindre effort, de Poincaré.
La phénoménologie mathématique rappelle Bouasse.
(Ostwald d'abord)

Ernst Schröder: Über zwei Definitionen der
Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze, ap.
Nova Acta der Kaiserl. Leop. Carol. Akademie
der Naturforscher, t. LXXI, n° 6. (Halle, 1898)

Définition de l'infini par Dedekind (1888) et
G. Cantor: Un ensemble infini est ~~semblable à~~
^{équivalent} à l'un de ses parties intégrantes.

Définition du fini par Ch. Peirce (1885) ap.
American Journal of Mathematics, t. VIII:

Un ensemble est fini, quand dans toute corres-
pondance univoque établie entre ses éléments on
revient nécessairement au premier; c'est à dire, si
à tout élément en correspond un autre, inversement
tout élément correspond à un autre.

On peut prouver l'identité formelle de ces deux
définitions, par l'algèbre des relations.

La première définition se traduit ainsi:

$$(a \text{ est } \infty) = \sum_z (z; \check{z} + \check{z}; z \notin 1') (z; a \subset a \notin \check{z}; z; a)$$

On sait que: $z; \check{z} + \check{z}; z \notin 1'$

est caractéristique la correspondance univoque.

L'équivalence de 2 ensembles s'exprime par:

$$(a \sim b) = (z; \check{z} + \check{z}; z \notin 1') (b \notin z; a) (a \notin \check{z}; b)$$

et en général: $(a \sim b) = \sum_z (a \sim_z b)$

Il faut en outre exprimer que \underline{a} est un système;
Caractéristique du système:

$$(\bar{a}; 1 \neq a) = (a \neq a + 0) = (a; 1 = a) = (a = a + 0) \\ = 0 + \bar{a} + a + 0.$$

Remarque On peut transformer tout jugement en une relation distinguée (susceptible de valeurs 0 et 1). Par exemple:

$$(x \neq \beta) = (1 \neq \bar{\alpha} + \beta) = 0 + (\bar{\alpha} + \beta) + 0$$

$$(x \neq \beta) = 1; \bar{\alpha}\bar{\beta}; 1.$$

De même:

$$(z; \bar{z} + \bar{z}; z \neq 1') = 0 + (\bar{z} + 1'); 1; (1' + \bar{z}) + 0.$$

La définition se traduit complètement comme suit:

$$(a \text{ est } \infty) = \sum_c (c; 1 = c) (a \sim c \subset a)$$

On remplace c par $\bar{z}; a$, et l'on trouve:

$$(a \text{ est } \infty) = \sum_z \left\{ 1; (1' + \bar{z}). 1; (1' + \bar{z}). \bar{a}; (\bar{z} + \bar{a}). (\bar{a} + \bar{z} + \bar{a}) \right. \\ \left. (\bar{a} + \bar{z}; z; a) + 0 \right\}$$

Traduisons la définition de Peirce en symboles.

$$(a \text{ est } \infty) = \prod_z (P \neq Q)$$

L'hypothèse P est que la correspondance \bar{z} est univoque, c.à.d.:

$$P = (z; \bar{z} + \bar{z}; z \neq 1')$$

La conséquence Q signifie que si à tout élément \underline{k} correspond un élément \underline{h} , tout élément \underline{h} correspond à un élément \underline{k} :

$$Q = \left\{ \prod_k [(h \neq a) \neq \sum_h (h \neq a) (h \neq z; k)] \neq \right. \\ \left. \prod_h [(h \neq a) \neq \sum_k (k \neq a) (h \neq z; k)] \right\}$$

Cette expression se simplifie : en coefficients :

$$Q = \left\{ \prod_k (\bar{a}_k + \sum_h a_h \hat{z}_{hk}) \in \prod_h (\bar{a}_h + \sum_k a_k \hat{z}_{hk}) \right\}$$

ou finalement :

$$Q = [(a \in \check{z}; a) \in (a \in z; a)]$$

Ainsi la définition de Peirce s'exprime par :

$$\prod_z [(z; \check{z} + \check{z}; z \in 1) \in [(a \in \check{z}; a) \in (a \in z; a)]]$$

ou par la relation distinguée :

$$\prod_z [0 \vdash 0; z + 0 \vdash 0; \check{z} + \check{a} \vdash z; a + \check{a}; (\check{z} + \bar{a})]; 1.$$

tandis que la définition de Dedekind (contraposée) s'exprime par la relation distinguée plus complexe :

$$\prod_z [0 \vdash 0; \check{z} + 0 \vdash 0; \check{z} + \check{a} \vdash z; a + \check{a}; z; a + \check{a}; (\check{z} + \bar{z} + \bar{a})]; 1.$$

Les trois premiers termes de la parenthèse sont identiques.

On peut prouver que les autres sont équivalents, en les transformant les uns dans les autres.

On ne peut pas dire que l'une de ces définitions soit plus négative que l'autre ; ces distinctions n'ont pas de sens en logique mais seulement en grammaire. La définition de Peirce est plus simple et plus naturelle. L'autre a été suggérée à M. Schröder par M. Lüroth : les ensembles finis sont ~~ceux~~ tels que si l'on peut les coordonner d'une certaine manière, ils seront toujours coordonnés, ou s'il laisse un reste, ils le laisseront toujours en reste ; les ensembles infinis sont ceux que l'on peut coordonner à un ~~ensemble~~ infini de manière à laisser un reste arbitraire.

§ 2. Théorèmes de Cantor relatifs aux puissances et à l'égalité de puissance (équivalence: \sim .)

Définition: $(a \sim b) = \sum_z (x; \check{z} + \check{z}; z \neq 1) (b \neq z; a)$
 $(a \neq \check{z}; b)$

Théorèmes:

- (15) $(a \sim b) = (b \sim a)$ relation symétrique
 (16) $a \sim a$ — réflexive
 (17) $(a \sim b) (b \sim c) \neq (a \sim c)$ — transitive
 (18) $(a \sim b) (c \sim d) \dots (ac = 0) (bd = 0) \dots \neq$
 $(a + c + \dots = b + d + \dots)$
 (19) $(a \neq c \sim b) \neq \sum_x (a \sim d \neq b)$
 (21) $(a \sim d \neq b) \neq \sum_x (a \neq c \sim b)$
 (23) $\sum_x (a \neq c \sim b) = \sum_x (a \sim d \neq b)$
 (24) $(a \neq b \sim c \neq a) \neq (b \sim a \sim c)$
 (27) $\sum_x (a \sim d < b) + (a \sim b) + \sum_x (b \sim c < a)$

On peut démontrer analytiquement la subsumption directe de (23) ^{ou (27)} mais non la subsumption inverse. Celle-ci (ou 21) implique un postulat touchant la nature du domaine I: il faut qu'il soit assez étendu pour qu'on puisse y trouver les éléments nécessaires à la correspondance indiquée (pour former \subseteq .)

On peut appeler la prop. 23 le théorème de la permutation des signes \neq et \sim (ou des signes $<$ et \sim). On peut supprimer sans inconvénient le signe \sum_x .

On peut intervertir les 2 signes successifs \sim et \neq , à la condition de changer la lettre intermédiaire.

Restent à démontrer les théorèmes suivants de Cantor :

théorème C : $(a \neq b \neq c \vee a) \neq (a \vee b \vee c)$

théorème B :

$$(a \neq b \vee c \neq d \vee a) \neq (a \vee b \vee d \vee c \vee a)$$

B se déduit de C au moyen de la permutation de 2 signes \vee et \neq : 2 signes \vee consécutifs se réduisent alors à un seul (en vertu de 17.)

Réciproquement, C se déduit de B en posant : $d = a$. Il suffira de démontrer B.

Le théorème A de Cantor résulte de notre th. 27, qui porte sur des ensembles quelconques, et qui n'implique pas que les 3 alternatives s'excluent (comme pour les nombres cardinaux.) En fait, elles ne s'excluent que pour les ensembles finis. Si on les désigne par $\delta, \varepsilon, \gamma$, le th. 27 s'écrit :

$$\delta + \varepsilon + \gamma = 1.$$

Le th. D de Cantor est : $\bar{\gamma} \bar{\varepsilon} \neq \delta$

qui résulte immédiatement du précédent ; et le

th. E de Cantor est : $\delta \bar{\varepsilon} \neq \bar{\gamma}$

cà d. : $\gamma \delta \neq \varepsilon$.

En effet, D s'exprime par :

$$\Pi_c [(c \neq a) \neq \overline{b \vee c}] \neq \Sigma_d (a \vee d < b)$$

et E :

$$\overline{a \vee b} \Sigma_d (a \vee d < b) \neq \Pi_c [(c < a) \neq \overline{c \vee b}]$$

On vérifie que E équivaut aussi au th. 27. Il suffira de démontrer celui-ci.

§3. Définition de l'égalité et de l'inégalité des puissances (on les représentera par A, B, C, \dots) :

$$(A = B) = (a \vee b)$$

$$(A < B) = \bar{\gamma} \delta = \Pi_c(\bar{b} \vee c < a) \Sigma_d(a \vee d < b)$$

D'où il suit que :

$$(A > B) = \gamma \bar{\delta}. \quad (A < A) = 0$$

car si bon fait $a = b$, le Π est la contradiction du Σ .

De même, $(A < B)$ exclut $(a \vee b)$, c'à d. $A = B$.

Donc : (40) $(A = B) (A < B) = 0$.

et : (40') $(A = B) (A > B) = 0$.

Enfin : (41) $(A < B) (A > B) = 0$.

Ainsi les 3 relations $<, =, >$ s'excluent mutuellement. — On a, en vertu de 17 :

$$(A = B) (B = C) \neq (A = C)$$

Théorème 46 : $(A = B) (B < C) \neq (A < C)$

c'à d. $(a \vee b) \Pi_c(\bar{c} \vee e < b) \Sigma_d(\bar{b} \vee d < c) \neq$
 $\Pi_e(\bar{c} \vee e < a) \Sigma_d(a \vee d < c)$

De même : $(A < B) (B = C) \neq (A < C)$

Théorème 47 : $(A < B) (B < C) \neq (A < C)$

c'à d. $\Pi(\bar{b} \vee e < a) \Sigma(a \vee d < b) \Pi(\bar{c} \vee f < b) \Sigma(\bar{b} \vee g < c)$
 $\neq \Pi(\bar{c} \vee e < a) \Sigma(a \vee d < c)$

Ainsi la relation $<$ est transitive, comme la relation $=$.

On peut encore démontrer ces 2 théorèmes de Cantor :

(48) $(A < B) (B < C) \neq (A < C), \quad (a < b) (B < C) \neq (A < C)$

7

Resterait à établir la proposition fondamentale:

$$(a \in b) \Leftrightarrow (A \leq B)$$

qui sert de base à la notion de puissance, et qui dispenserait des théorèmes 48 (au moyen de 46 et 47)

On en déduirait aussi les th. B et C, et le th. 24 et suiv.

Mais on va plutôt démontrer d'abord B et C.

§ 4. On mettra le th. B sous cette forme:

$$(a \underset{x}{\cap} b, \in b \underset{y}{\cap} a, \in a) \Leftrightarrow (a \cap b \cap b, \cap a, \cap a)$$

Il suffit de démontrer l'un des 4 équivalences de la th.

Le th. est surtout intéressant pour le cas \subset , où a, b sont des parties integrantes de $a \cap b$.

On projette indéfiniment a , sur \bar{b} (en b_1) et b , sur a (en a_1), suivant les principes $x \cap y$. On a ainsi:

$$a_n \in \dots \in a_3 \in a_2 \in a_1 \in a.$$

$$b_n \in \dots \in b_3 \in b_2 \in b_1 \in b.$$

$$a_{2n} = (y; x)^n; a \quad | \quad b_{2n} = (x; y)^n; b$$

$$a \cap b, \cap a_2 \cap b_3 \cap a_4 \dots \cap a_{2n} \cap b_{2n+1} \cap \dots$$

$$b \cap a, \cap b_2 \cap a_3 \cap b_4 \dots \cap b_{2n} \cap a_{2n+1} \cap \dots$$

Il suffit de démontrer l'équivalence de 2 ensembles pris de la 2^e série (d'un a pair avec un a impair, ou d'un a et d'un b pairs, etc.)

Or les séries des a et des b sont convergentes, car les a_{n+1} , b_{n+1} sont contenus dans a_n , b_n . On a ainsi:

$$a_{2(n+1)} \in a_{2n+1} \in a_{2n}$$

Donc $\lim a_{2n+1} = \lim a_{2n}$, c'est-à-dire $a_{2\infty+1} = a_{2\infty}$

puisque $a_{2n+1} \sim a_{2n+1}$, $a_{2n} \sim a_{2n}$.

Donc $a_n \sim a_{n+1}$, ce qui démontre le théorème.

La relation \sim qui établit la correspondance entre a et b est: $\sim = (\bar{y}; \bar{x})^\infty; x; (y; x)^\infty = (\bar{y}; \bar{x})^\infty; \bar{y}; (y; x)^\infty$.

Paradoxe: Tout dans le cas où l'on a $<$ et $\sim =$, tout a_{n+1} est $<$ a_n , quel que soit n ; et pourtant on a:

$$a_{2n+1} = a_{2n}.$$

Le paradoxe est analogue à celui d'Achille, ou à celui de la tangente de $\frac{\pi}{2}$, ou à celui d'une variable x_n telle que:

$$a_n < x_n < b_n$$

et que $\lim a_n = \lim b_n = \lim x_n$.

Le th. B découle immédiatement de th. E: $\gamma \delta \notin \varepsilon$. (61)

$\Sigma(a \cap d < b) \Sigma(b \cap c < a) = \Sigma(a \cap d < b \cap c < a) \notin (a \cap b)$
Si deux ensembles sont équivalents chacun à une partie intégrante de l'autre, ils sont équivalents entre eux.

Théorème 62: $(a \notin b) \notin (A \leq B)$

ou simplement: $(a < b) \notin (A \leq B)$

Or: $(a < b) \notin \delta \notin \varepsilon + \delta$

$$(a < b) = (a < b) \delta \quad (a < b) \gamma \delta \notin \varepsilon$$

$$(a < b) \delta \notin \varepsilon + \bar{\gamma} \quad (a < b) \notin (\varepsilon + \delta)(\varepsilon + \bar{\gamma}) = \varepsilon + \delta \bar{\gamma}$$

La puissance de la partie est inférieure ou égale à la puissance du tout.

Les th. 60 peuvent se résumer par:

$$(61) \quad \bar{\gamma} \delta \varepsilon = 0$$

$$\text{ou: } \delta \varepsilon \notin \gamma$$

$$\varepsilon \gamma \bar{\delta} = 0$$

$$\varepsilon \gamma \notin \delta$$

En combinant 61 et 61, on trouve:

$$(6k) \quad \delta\gamma\bar{\varepsilon} + \delta\bar{\gamma}\varepsilon + \delta\gamma\varepsilon = 0$$

d'où: (65) $\bar{\gamma}\delta = \bar{\varepsilon}\delta, \quad \gamma\bar{\delta} = \gamma\bar{\varepsilon}$

ce qui fournit une autre définition de l'inégalité

($\bar{\gamma}\delta$ = plus petit; $\gamma\bar{\delta}$ = plus grand)

Le th. 27 peut maintenant s'écrire:

$$1 = \bar{\gamma}\delta + \varepsilon + \gamma\bar{\delta} (= \bar{\varepsilon}\delta + \varepsilon + \gamma\bar{\varepsilon})$$

ce qui exprime le théorème A de Cantor:

$$(A < B) + (A = B) + (A > B) = 1.$$

Il suffirait, pour le prouver, de démontrer une des formules: $1 = \delta + \varepsilon + \gamma$, $\delta\bar{\gamma}\bar{\varepsilon} = 0$, $\delta\bar{\gamma} \neq \varepsilon$ (69).

ou encore: $\varepsilon = \gamma\delta + \bar{\gamma}\bar{\delta}$, $\delta = \gamma\varepsilon + \bar{\gamma}\bar{\varepsilon}$, $\gamma = \varepsilon\delta + \bar{\varepsilon}\bar{\delta}$ (70.)

§ 5. Définition de l'ordre simple (linéaire) au moyen de l'algèbre des relations. Soient deux éléments i, j on dira que i est inférieur à j ($i < j$)

si: $(i \neq x_{ij}) = x_{ij}$

κ est le principe d'ordination (!) Trois caractères:

1° Si $i < j$, on ne doit pas avoir: $j < i$:

$$\Pi_{ij} [(i+j \neq a) (i \neq x_{ij}) \neq (j \neq x_{ji})]$$

2° Entre 2 éléments quelconques de a on a: $i < j$ ou $j < i$:

$$\Pi_{ij} [(i+j \neq a) (i+j) \neq (i \neq x_{ij}) + (j \neq x_{ji})]$$

3° La relation κ est transitive dans a :

$$\Pi_{ij} [(i+h+j \neq a) (i \neq x_{ih}) (h \neq x_{hj}) \neq (i \neq x_{ij})]$$

(1) Supposé appliqué à un ensemble: $a = a; 1 = a \neq 0$.

Un 1^{er} caractère, à savoir que l'on n'a plus $i \leq i$:

$$\Pi_i [(i \neq a) \in (i \neq x; i)]$$

dérivé analytique du 1^{er}.

Les trois caractères peuvent se résumer en une relation distinguée:

$$(a)_x = \check{a} + (\check{x} + \check{\bar{x}})(1' + x + \check{x})[x + \check{x} + (\check{a} + \check{\bar{x}})] + \check{a}$$

ou en un produit de jugements:

$$(a\check{a}x\check{x} = 0) / (0'a\check{a} \neq x + \check{x})(a\check{a}.x; ax \in x)$$

On peut démontrer, au moyen de ces formules, que si x ordonne a , il ordonne ~~tout~~ ^{tout ensemble} \check{a} qui fait partie de a ; que si x est un principe d'ordination simple, \check{x} en est aussi un.

La relation x reste indéterminée en dehors de a . On peut la déterminer en stipulant, par ex. qu'elle soit nulle en dehors de a (qu'elle soit bornée dans a):

$$\text{Condition advenue: } x; \check{a} = 0 \quad \text{et: } \check{x}; \check{a} = 0.$$

ou:

$$x \neq a\check{a}.$$

C'est que la matrice de x est contenue dans la relation quadrillée $a\check{a}$ (intersection des ensembles a et \check{a} .)

Le principe x (dit normal) est alors déterminé d'une manière unique. La condition de transitivité devient simplement:

$$x; x \in x \quad (1)$$

Les 2 autres deviennent:

$$(x\check{x} = 0) / (x + \check{x} = 0'a\check{a}) =$$

$$(\check{x} = 0'a\check{a}\check{x}) = (x = 0'a\check{a}\check{x})$$

Donc:

$$ax(\text{normal}) = (x; x \neq x = 0'a\check{a}\check{x})$$

1) Condition de transitivité absolue

Tout principe d'ordination ^{κ} donne naissance à un principe normal $a\check{a}\kappa$: $(a)_\kappa = a\check{a}\kappa$
 et celui-ci est défini d'une manière unique.

Inversement, soit γ un principe normal d'ordination de l'ensemble a ; le principe le plus général a pour former : $\kappa = \gamma + u(\bar{a} + \check{a})$
 u étant une relation arbitraire. $[\bar{a} + \check{a} = (a\check{a})]$

Tout principe d'ordination de l'ensemble 1 est un principe normal.

Cas particuliers : $a = 0$: $(a)_\kappa$ est vérifié par toute relation, a_κ par aucune, sauf $\kappa = 0$.

a a un élément, i : $(a)_\kappa$ est vérifié par tout $\kappa = u(\bar{a} + \check{a})$, a_κ par aucune, sauf $\kappa = 0$.

a a deux éléments, i et j . Les seuls principes d'ordination sont : $\gamma = ij$, $\check{\gamma} = \check{i}\check{j}$. ^{normaux}

Théorème : Tout ensemble peut être ordonné simplement. Il suffit de le dénombrer pour l'ensemble 1. C'est un th. de la théorie des relations binaires, à savoir que l'admissible affirmation : $1_\kappa = (\kappa; \kappa \in \kappa = 0' \check{\kappa})$
 a au moins une racine κ .

On sait remplir séparément les deux conditions : il existe des relations transitives $(\kappa; \kappa \in \kappa)$ et des relations entièrement impaires : $(\kappa = 0' \check{\kappa}) = (\kappa + \check{\kappa} = 0') = (\kappa \check{\kappa} = 0)$
 où de qui ont les cases de la diagonale vides, et qui, sur chaque couple symétrique de cases, en ont une vide.

Mais y a-t-il toujours des relations transitives
 impaires ? dans tout domaine de pensée donné ?
 Cela est manifeste pour les ensembles finis, infinis
 dénombrables et même continus : il suffit d'imaginer
 toutes les cas, supérieurs à la diagonale pleines et toutes
 les autres vides. Mais ce n'est pas démontré d'une
 manière générale. Peut-être pourrait-on concevoir un
 domaine qui ne laisse ordonner simplement d'aucune
 manière.

On peut formuler logiquement d'autres conditions:
 Il y a dans \underline{a} (ordonné par \underline{x}) un premier élément:

$$K_{\underline{x}}^{\underline{a}} = \sum_h (h \neq a) \Pi_k [(k \neq a)(k \neq h) \neq (h \neq x; k)]$$

Il y a dans \underline{a} (ordonné par \underline{x}) un dernier élément:

$$Z_{\underline{x}}^{\underline{a}} = \sum_h (h \neq a) \Pi_k [(k \neq a)(k \neq h) \neq (k \neq x; h)]$$

ce qui équivaut à remplacer x par \check{x} dans $K_{\underline{x}}^{\underline{a}}$.

Formule du 1^{er} élément: $N = a[(1' + x) + \bar{a}]$
 du dernier: $H = a[(1' + \check{x}) + \bar{a}]$

Sous l'hypothèse $a_{\underline{x}}$, les formules se simplifient:

$$K_{\underline{x}}^{\underline{a}} = (a \neq \check{x}; 1), \quad Z_{\underline{x}}^{\underline{a}} = (a \neq x; 1)$$

$$N = a(\check{x} + 0), \quad H = a(\bar{x} + 0)$$

Définition de la similitude de deux ensembles
 ordonnés (\underline{a} par \underline{x} , \underline{b} par \underline{y}), au moyen de la
~~coordination~~ $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y} + \underline{a}\underline{b}$. coordination \underline{z} :

$$(\underline{z} \in \bar{a}\bar{b})(x; x; \check{z} \neq y)$$

La dernière proposition affirme que \underline{z} est une coordination
semblable; elle résume les prop suivantes:

$$S = \prod_{ijk} [(i+j \in a) / (h+k \in b) (h \in z; i) (k \in z; j) (i \in x; j) \\ \in (h \in y; k)]$$

D'après l' intuition, une coordination semblable
est réversible, c'est à dire qu'on doit avoir :

$$S = (z; x; \check{z} \in y) (\check{z}; y; x \in x)$$

ce qui n'est pas facile à démontrer logiquement.

En somme, l'Algèbre des relations a fait ses
preuves en démontrant toutes les propositions
de Cantor, fondamentales dans la théorie des
ensembles. Elle relie la Mathématique à la Logique.
Elle est un instrument de recherche mathématique.

Sur l'idée d'ordre, cf. Burali-Forti, ap. Rendic-
conti del circolo matematico di Palermo, t. 8, 1894.

G. Vivanti et Vailati ap. Rivista, 1892 et 1894.

Schröder, die selbständige Definition der Mächtigkeiten
0, 1, 2, 3, und die explizite Gleichzahligkeitsbedingung.

ap. Nova acta t. I. XXI, n° 7.

Soit un ensemble $a = a + 0 = a; 1$. Il s'agit d'exprimer
à quelle condition il aura telle puissance (n. cardinal)

$$(Num a = 0) = (a = 0) = 0 + \bar{a} = \check{a} + \bar{a}.$$

Remarque: La nullité d'une relation se traduit par :

$0 + \bar{a} + 0$. Mais comme on sait que a est un
ensemble ($a + 0$) cela simplifie la condition

$(\text{Num. } a = 1) = (0'; a = \bar{a}) = (1' + \bar{a} = a)$
 toujours sous la même condition. On peut obtenir cette
 formule en partant de la prop. suivante:

$$\sum_i (i \notin a) \cdot \Pi_j [(j + i) \notin (j \notin a)]$$

Le même on obtient la formule:

$$(\text{Num. } a = 2) = (0' a \bar{a} \neq 0'; a 0')$$

en partant de la prop. suivante:

$$\sum_{ij} (i \neq j) (i + j \notin a) \cdot \Pi_h [(h + i)(h + j) \notin (h \notin a)]$$

Si l'on pose: $0' a \bar{a} = c$, la condition se réduit à:

$$c \neq c; c$$

et cette relation caractérise les ensembles de 2 éléments.

On peut formuler ainsi la relation récurrente:

« L'ensemble a contient un seul élément de plus que
 l'ensemble b »:

$$\sum_z (z; \bar{z} + \bar{z}; z \notin 1') (b \notin z; a) [z + (\bar{a} + \bar{z}; b) \neq 0]$$

en partant de: $\sum_i (i \notin b) (a \sim b + i)$

« L'ensemble a contient au moins 1 élément »:

$$(a \neq 0) = 1; a = \bar{a}; a$$

« L'ensemble a contient au moins 2 éléments »:

$$(0' a \bar{a} \neq 0) = (0'; a = 1) = 0 + 0'; a = \bar{a}; 0'; a -$$

« L'ensemble a contient au moins 3 éléments »:

$$(0' a \bar{a} \cdot 0'; a 0' \neq 0) = \bar{a}; 0' (0'; a 0'); a.$$

cette dernière formule se déduit de la proposition:

$$\sum_{ijh} (i \neq j) (i \neq h) (j \neq h) (i + j + h \notin a)$$

Les formules qui expriment qu'un ensemble a contient au plus 1, 2, ... éléments sont la négation de celles qui expriment qu'il en contient au moins 2, 3, ...

On peut combiner ensemble ces prop. limitatives, par ex. définir l'ensemble de nombre 1 comme celui qui contient au moins et au plus 1 élément.
Cubius : un ensemble qui contient au plus 2 éléments est un ensemble qui en contient 0 ou 1.

On obtient la condition de légalité de nombre de 2 ensembles a et b ^{dans un domaine} de l éléments au plus en affirmant que a et b contiennent simultanément au moins 1, 2, ou 3 éléments, ~~ou bien~~ ^{et} que \bar{a} et \bar{b} contiennent simultanément au moins 1, 2, ou 3 éléments.
(cà d que a et b en contiennent au plus 3, 4 ou 5.)

On bien encore en combinant les conditions de légalité de nombre de a et b pour 1, 2, 3, et celles de légalité de nombre de \bar{a} et \bar{b} pour 1, 2, 3.

En général, la condition explicite de légalité de nombre de 2 ensembles finis ~~se compose~~ ^{dans un domaine} de $2n$ éléments se compose des conditions de légalité de a et b pour 1... n et des conditions de légalité de \bar{a} et \bar{b} pour 1... n .

$$C_1 C_2 C_3 \dots C_n \times Y_1 Y_2 \dots Y_n$$

Y_k étant C_k où l'on a remplacé a par \bar{a} (et contra posé).
Les conditions C sont les résultantes/partielles / cà d l's

conséquences nécessaires) de $(a \cap b) = (\text{Num } a = \text{Num } b)$
Pour un domaine infini, la condition devient:

$c_1 c_2 c_3 \dots$ à l'infini,

et les conditions complémentaires γ disparaissent.

Si l'on formule c_n sous la forme: $f_n(a) = f_n(b)$,
la condition générale pourra s'écrire:

$$f_1(a) f_1(b) + f_2(a) f_2(b) + \dots + f_n(a) f_n(b) + \dots$$

où $f_n(a)$ affirme que: $(\text{Num. } a = n)$

« L'ensemble a contient 3 éléments » s'exprime par:

$$\left[\sum_i i; c_a \{ 0; c_a [1 + (1 + \bar{a} + i)] \} \right]; a$$

qu'on déduit de:

$$\sum_{i,j,h} (i \neq j)(j \neq h)(h \neq i)(i+j+h \in a) \prod_k [(k \neq i)(k \neq j)(k \neq h) \neq (k \neq i)]$$

On ne peut pas effectuer cette sommation et obtenir la formule sous forme fermée (explicite.)

Ainsi l'idée de nombre est loin d'être simple (Dedekind).
Comment expliquer la simplicité de la définition de Cantor
(Abstraction de la nature et de l'ordre des éléments)? C'est
qu'elle est faite au p. de vue de la compréhension; mais l'ordre
d'ordre est déjà compliqué; comment l'idée de nombre
pourrait-elle être simple? — Les nombres sont considérés
comme donnés simples en arithmétique; mais il s'agit
de trouver les fondements logiques de l'arithmétique,
dans l'Algèbre des relations, qui enveloppe la Logique
ordinaire, et qui est une Logique de l'extension.

Whitehead: The Geodesic Geometry of Surfaces
in non-Euclidean Space, ap. Proceedings
of the London Mathematical Society, t. XXIX.
(10 mars 1898.)

Deux formes d'espace elliptique: simple et double,
ou polaire et antipodal, ~~ou sphérique et elliptique~~.
Dans le 1^{er}, 2 de. on se rencontre qu'en un point;
dans le 2^e (dit sphérique), en deux.

Beltrami a prouvé que la géométrie géodésique
des surf. à courb. const. d'espace euclidien
est la même que la géom. rectiligne dans les plans
d'espace elliptique ou hyperbolique, suivant
que la courb. de la surf. est positive ou négative.

Propositions dues à Jean Bolyai:

I. La géom. des grands arcs d'un sphère de ray.
 ρ dans un espace elliptique dont la courb. est γ ,
est identique à la géom. rectiligne des plans
d'un espace elliptique dont la courb. est: $\gamma \sin \frac{\rho}{\gamma}$.

II. La géom. des grands arcs d'un sph. de rayon
 ρ dans un esp. hyperbolique de courbure γ , est
identique à la géom. rectiligne des plans d'un
espace elliptique dont la courb. est: $\gamma \sinh \frac{\rho}{\gamma}$.

III. La géom. ^{des} géodésiques (lignes de égale distance)
sur une surf. d'égale distance δ d'un plan dans un
esp. hyperbolique de courb. γ , est identique à la géom.
rectiligne des plans d'un esp. hyperbolique dont la

constante est: $\gamma \text{ ch } \frac{5}{8}$. (lignes limites)

IV. La géom. des géodésiques (horicycles) sur une surface limite (horisphère) dans l'espace hyperbolique est identique à la géom. rectiligne des plans de l'espace euclidien.

— En appelant γ rayon de l'un de l'espace, on a commis un contre sens, ~~qui est~~ en croyant que l'espace euclidien (dit plan) jouit d'une propriété spéciale, à savoir que les plans des autres espaces peuvent être représentés par des surfaces en lui. Bolzaï a eu effet démontré qu'un plan euclidien peut être représenté par une surface dans l'espace hyperbolique.

— Addition, mai 1898: La comparaison des longueurs des constantes de différents espaces est un non-sens: Aucune comparaison n'est possible entre des lignes de différents espaces. La longueur γ de la const. spatiale ne peut être mesurée que par rapport à la longueur d'une droite du même espace prise pour unité arbitraire.

Mais on peut comparer les constantes spatiales quand on discute la géom. géodésique de surf. de l'espace à 3 dim. Or toute géom. non-euclidienne peut être interprétée comme une géom. géodésique (dans un espace à 4 dim.). Mais cette interprétation n'est pas nécessaire, attendu que la géom. euclidienne peut aussi être interprétée dans un espace non-euclidien.

— La comparaison de la constante spatiale γ à

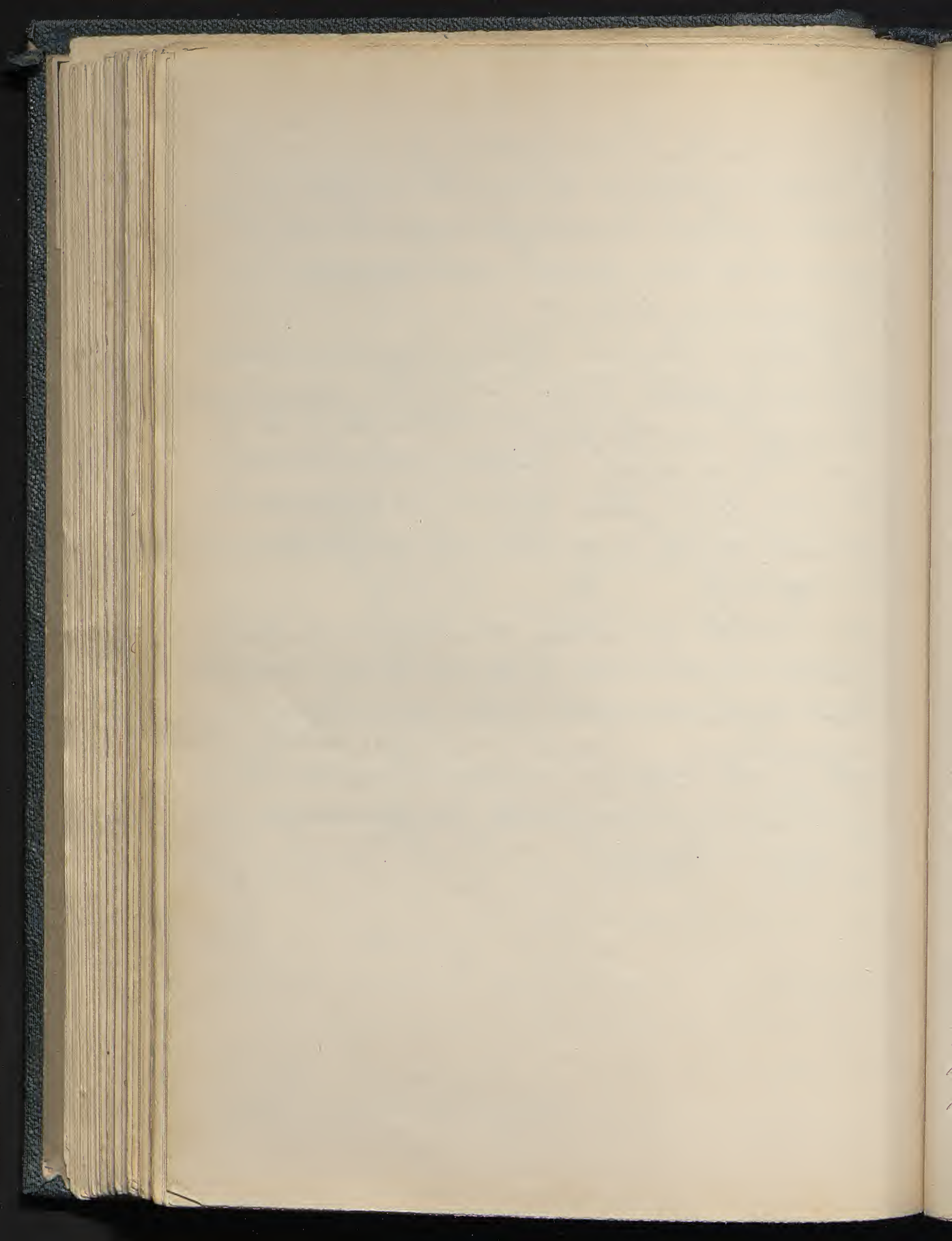
(1) Sphère de rayon infini, ou surface de dist. égale, mais infinie, à partir d'un plan.

nos unités empiriquement données (le mille ou le diamètre de la terre) est le problème fondamental de la Géom. appliquée. Les propriétés de l'espace par rapport à notre expérience seront différentes, suivant le rapport de la const. spatiale à cette ~~grandeur~~ longueur - étalon empiriquement donnée.

On dit que l'on peut adopter n'importe quelle valeur de la const. spatiale, puisque les lois de la nature peuvent être modifiées en conséquence. Cela est faux, si la possibilité de mesurer les lignes est indépendante du choix d'une géom. spéciale. Le rapport de la circ. ~~sur~~ de ray, γ au diamètre est respectivement:

$$\pi \gamma \sin \frac{\gamma}{\gamma}, \quad \pi, \quad \pi \gamma \sinh \frac{\gamma}{\gamma}$$

dans les trois géométries; par conséquent, il est possible de déterminer γ par une mesure actuelle, ~~sans~~ indépendamment de lois naturelles, plus hypothétiques. L'exactitude pratique avec laquelle elle peut être obtenue n'est pas en question; il suffit que l'expérience soit possible pour prouver que γ n'est pas arbitraire.



A. N. Whitehead: A Treatise ^{on} of Universal
Algebra, with applications. Vol. I (Cambridge, 1898.)

Etude des divers systèmes de raisonnement symbolique
(Quaternions, Grassmann, Boole) ou des différentes
Algèbres possibles, applicables à divers espaces: l'édifice
de l'espace généralisé sert à leur interprétation.

La logique symbolique est une pièce d'Algèbre qui
se trouve dans les Mathématiques.

La Mathématique est le développement de tous les
types de raisonnement formel, nécessaire & déductif.

Les définitions mathématiques ont un sens conven-
tionnel, en Math. pures, et existentiel, en Math.
appliquées. Les 1^{es} sont invérifiables; les secondes
doivent être établies comme vraies.
Soumises au seul principe de contradiction

Pour qu'une Math. pure puisse être appliquée, il faut
que les propriétés attribuées aux êtres de raison qu'elle
traite soient analogues aux propriétés des objets réels.

Les Math. se sont longtemps confinées dans l'étude
du Nombre, de la Grandeur et de l'~~Analyse~~ Espace.
Introduction des quantités complexes, fondée sur des
définitions conventionnelles; on leur a rendu indigne
le nom de quantité.

Il y a des Algèbres qui n'ont pas pour objet le Nombre ni
la Grandeur. Ce sont des sciences mathématiques, ~~qui~~ c'est-à-d.
des calculs qui facilitent le raisonnement dans tel ou tel
domaine de la pensée ou de l'expérience.

On exposera les nouvelles Algèbres comme des ~~uniques~~
instruments de déduction, et comme des symbolismes
représentatifs de concepts fondamentaux. Si elles ont
été négligées jusqu'ici, c'est qu'on n'a pas aperçu leur
unité d'idée, et ~~parce~~ qu'on ne les a pas conçues indépen-
damment les uns des autres, comme sciences distinctes,
quoiqu'elles puissent s'appliquer au même objet (de même
que la Géométrie analytique, la G. synthétique et la G.
projective s'appliquent toutes à l'Espace.)

I. Principes généraux. II. Algèbre de la Logique symbolique.
III. Théorie de la Multiplicité de positions (généralisation
de l'espace) IV. Calcul de l'extension (Grassmann)
appliqué; V. à la théorie des formes dans un ensemble à
3 dimensions; VI. à la Géom. non euclidienne; VII.
à la G. euclidienne.

A Schèmes substitutifs. Un schème est un ensemble
d'objets ayant en commun une propriété générale: a, b, c ,
Sont équivalents ceux qui possèdent cette propriété sous
le même mode: $a = a', b = b', \dots$

Deux objets équivalents, m et m' , peuvent dériver
de objets équivalents: $a, b, c, \dots; a', b', c', \dots$ par des
opérations différentes. Les modes par lesquels des opérations
peuvent différer sans cesser de donner des résultats
équivalents sont les Caractéristiques du schème.

Si deux schèmes ont les mêmes caractéristiques, on peut
les substituer l'un à l'autre et opérer sur l'un au lieu
de l'autre: Si $a = a'$, on aura: $\alpha = \alpha'$;
et m dérivera de a, b, \dots de la même manière qu'il
dérivera de α, β, \dots

B

Livre I: Principes du symbolisme algébrique

Ch. I: De la nature d'un calcul

Trois espèces de signes: suggestifs, expressifs (mots)
substitutifs (mathématiques.)

Un calcul est l'art de manipuler ou de combiner des signes substitutifs suivant certaines règles telles, que le résultat des opérations, une fois interprété, exprime une proposition vraie concernant les objets significés.

On peut développer. Une fois les règles posées, on peut développer tout le calcul sans faire attention au sens des signes. On peut aussi poser des règles arbitraires et manipuler des marques dépourvues de sens; mais c'est là un jeu frivole, qui ne devient un vrai calcul et n'a de valeur scientifique que lorsqu'on conçoit ces marques comme des signes substitutifs, susceptibles d'interprétation inconnue.

Les propositions, dans un calcul, revêtent la forme générale de l'équivalence. Deux objets équivalents peuvent ~~être~~ se remplacer l'un l'autre dans leurs relations. Les signes qui les représentent sont dits équivalents, et peuvent se substituer l'un à l'autre, dans certains limites (domaine d'équivalence).

Equivalence n'est pas identité: l'équivalence n'est intéressante et instructive que si elle implique diversité. Il ne faut pas définir 2 signes équivalents comme des signes représentant un même objet, mais plutôt 2 objets sont équivalents lorsqu'ils rentrent sous un même concept, lorsqu'ils sont identiques ou semblables à un certain point de vue. Ne pas confondre la copule

= avec la copule logique est. Si $b = b'$, c'est que b est B , et b' est B aussi.

Toute équivalence renferme un truisme (identité partielle) et un paradoxe (identité de choses différentes).
En tout calcul et le critérium d'équivalence expose sur le truisme, les conséquences au contraire développent le paradoxe. Une fois les conditions de l'équivalence réelle traduites en formules, le critérium d'équivalence devient tout superficiel et formel; on oublie l'identité pour ne remarquer que les différences.

Les jugements d'équivalence sont directs ou indirects. Dans ce 2^e cas, les Objets équivalents sont dérivés tous deux d'objets directement (intuitivement) équivalents. Cette dérivation s'appelle opération, combinaison, synthèse. Elle s'effectue soit par un événement phénoménal, soit par une action de l'esprit. Un objet a cette résultante d'une opération effectuée sur b, c, d, s'il représente à l'esprit quand les objets b, c, d sont présentés de une certaine manière. A

B Le schème substitué à l'autre est un ensemble de signes substitutifs. On opère sur ces signes, et l'on interprète les résultats à la fin du calcul. Exemple: les grandeurs de diverses espèces.

Schémes conventionnels. Inversement, un système de signes substitutifs est un schème conventionnel, créé et doué de propriétés arbitraires tout en précis pour pouvoir être substitué à un schème d'objets.

Les caractéristiques du schème sont les lois conventionnelles qui établissent l'équivalence de diverses combinaisons. Au lieu de raisonner sur les propriétés réelles des objets, on raisonne ^(concrets) sur les propriétés conventionnelles des signes, et comme ceux-ci sont susceptibles de manipulation physique et sensible (sur le papier), le raisonnement est remplacé par le calcul (combinaison ou construction idéale).

Formes ininterprétables. Difficulté, quand un calcul n'est que partiellement interprétable. Ex. le calcul des imaginaires, donne des résultats interprétables numériquement, quand il ne s'agit que de nombres réels. Comment un raisonnement algébrique qui n'a pas de sens arithmétique peut-il donner des résultats valables en arithmétique? C'est que la valeur des lois de l'Algèbre ne dépend pas de l'arithmétique; seulement les lois algébriques sont identiques aux lois arithmétiques, et c'est pourquoi, toutes les fois qu'un théorème d'Algèbre est interprétable, il donne un théorème d'arithmétique vrai. — L'Algèbre ne dépend pas non plus de la géométrie: la valeur d'un calcul ne dépend pas de son interprétabilité.

Néanmoins, l'interprétation géométrique des imaginaires
à l'aide de l'Algèbre; ce sont deux schémas qui se prêtent
un mutuel secours, qui sont substitués l'un de l'autre.

Ch. II: Multiplicités.

A tous les objets d'un schéma qui possèdent le même mode
de la propriété fondamentale, on fait correspondre un
élément de la multiplicité. La multiplicité est donc
l'ensemble des modes abstraits de la propriété détermi-
nante du schéma. Des objets équivalents correspondant
à un seul et même élément. Ses relations entre les
objets correspondent des relations entre les éléments;
les caractéristiques du schéma deviennent les caracté-
ristiques de la multiplicité, dont on peut déduire
toutes les relations entre les éléments (ex: axiomes
géométriques). Cette déduction est l'œuvre du calcul.

— La définition des caractéristiques peut ^{impliquer} ~~impliquer~~
des propriétés secondaires des objets, et par suite des
éléments correspondants. On considère par suite chaque
élément comme susceptible de modes spéciaux. La
seule propriété secondaire dont il sera question est
l'intensité (ex: notes de musique). A

Si l'on distingue dans une multiplicité l'ensemble
des éléments qui possèdent un certain caractère, et
ensemble est une sous-multiplicité. Si ce caractère
appartient à des éléments d'une autre multiplicité B
la sous-multiplicité sera contenue dans cette autre,
elle sera commune à A et B; celles-ci seront dites
suivantes ^{dites} suivant C. Cela implique que A, B, C
ont entre elles une connexion, et font partie d'une même
multiplicité qui les comprend toutes. (concl.)

7

Définitions de diverses multiplicités spéciales:
uniformes, réelles simples ou complexes, quantitatifs,
continues, à n dimensions.

Ch. III: Principes de l'Algèbre universelle

Définitions générales de l'addition et multiplication.
Les définitions spéciales engendrent les Algèbres
spéciales.

Dans tout système algébrique il n'y a qu'un seul
type d'équivalence reconnu; c'est-à-d. que la définition
de l'équivalence vaut pour toute addition ou
multiplication. Ex: le Calcul différentiel fait
exception (on ne peut pas substituer partout des
quantités égales.)

Principes de l'addition. On suppose que dans un
~~ensemble~~^{groupe} d'objets a, b, \dots, z , on puisse combiner 2
objets en une synthèse dont le résultat est un 3^e
objet de ce même groupe (possédant les mêmes propriétés);
que ce résultat est uniunique c'est-à-d. que tous les
résultats possibles de cette synthèse sont équivalents;
que cette synthèse comporte un ordre déterminé:
 $a \circ b, b \circ a$ sont en général différents.

$$(a \circ b) \circ p = a \circ b \circ p.$$

Loi commutative: $a \circ b = b \circ a$

Suppose que l'ordre de l'opération n'est pas indifférent

Loi associative: $a \circ b \circ c = a \circ (b \circ c)$

Une telle synthèse s'appellera addition (+) Une telle
multiplicité sera dite algébrique. Un ensemble d'objets
correspondant constituera un système algébrique.

Principes de la soustraction. Problème: $x + b = a$
 Peut n'avoir pas de solution, en avoir une, ou plusieurs.
 Supposons qu'il y ait une solution (càd un élément
 de la multiplicité): $a \vee b$; par définition:

$$a \vee b + b = a$$

$$a \vee b \vee c + (b + c) = a \vee b + b = a$$

(en supposant qu'il y ait une solution: $(a \vee b) \vee c$.)

Supposons qu'il y ait une solution: $a \vee (b + c)$;
 on trouve: $a \vee (b + c) = a \vee b \vee c$.

Les deux solutions sont équivalentes. Par suite:

$$a \vee b \vee c = a \vee c \vee b.$$

Si $a \vee b$, $b \vee c$ existent, $a \vee (b \vee c)$ existe aussi.

On trouve: $a \vee b + c = a \vee (b \vee c)$

$$(a \vee b \vee c) = (a \vee c) \vee b = a \vee (b + c) = a \vee (c + b)$$

Si l'on admet que la solution $(a \vee b)$, quand elle
 existe, est unique (càd ~~un~~ unique), l'opération s'appelle alors
soustraction $(-)$. On a alors: $a + b - b = a$

Donc: $a - b + b = a + b - b$.

Ceci permet de donner toujours un sens aux ^{er} membres,
 car si $(a - b)$ n'existe pas, $a + b - b = a$ existe toujours.

On démontre alors: $a + b - c = a + (b - c)$

$$a - b + c = a + c - b.$$

Élément nul. Si $(a - b)$ est toujours un sens, on a:

$$c + a - a = c + b - b = c$$

donc: $a - a = b - b = 0$.

Définition de zéro: $a + 0 = a$.

d'où: $a - 0 = a - (b - b) = a - b + b = a$

Propriétés de $(0 - a)$: $b + (0 - a) = b - a$

$$b - (0 - a) = b + a$$

9

On est amené à écrire : $(0-a)$ sous la forme $-a$,
et : $a = 0 + a$ $+ a$

Ce sont des pas (steps) opposés, par rapport à 0. En général, $(b-a)$ est le pas de a à b . Les 2 pas opposés $+a$ et $-a$ se neutralisent. Règle des signes. Les pas obéissent aux lois commutative et associative.

Multiplication. C'est une autre combinaison de 2 termes qui n'appartiennent pas nécessairement au même groupe, qui est univoque, mais non nécessairement commutative ni associative.

Soient 2 ^{multiplicités} ~~ensembles~~ algébriques A, B ; la synthèse d'un terme a de la 1^{re} et d'un terme b de la 2^e (pris avec leur ordre) a pour résultat un nouvel objet c d'une 3^e multiplicité C , qu'on suppose algébrique. Par suite, $ab'' + b'a'$, $(a+a'+a''...)(b+b'+b''...)$ sont des éléments de C .

La multiplication vérifie, par définition, la loi distributive par rapport aux 2 multiplicités :

$$\begin{aligned} a(b+b') &= ab + ab' & (b+b')a &= ba + ba' \\ b(a+a') &= ba + ba' & (a+a')b &= ab + ab'. \end{aligned}$$

— Si une multiplicité A est sui-multiplicative (du 1^{er} ordre) l'ensemble des produits deux termes 2 à 2 est une multiplicité B du 2^e ordre.

Si l'on peut multiplier entre eux les termes de A et B , leurs produits forment une multiplicité C du 3^e ordre.

Loi associative : Supposons un ensemble de multiplicités sui-multiplicatives et admettant la multiplication 2 à 2. Les produits d'une multiplicité du m ^e ordre avec une

multiplicité du n^{e} ordre forment une multiplicité du $(m+n)^{\text{e}}$ ordre. Un tel ensemble s'appellera un système algébrique complet.

Si la multiplicité du m^{e} ordre est identique à la multiplicité du 1^{er} , on aura une algèbre de $(m-1)^{\text{e}}$ espèce. Une algèbre de l'espèce m contient qu'une multiplicité: on l'appellera linéaire.

Emploi des points au lieu de parenthèses (Johnson)

— Soit O_1 le zéro de A , O_2 celui de B , O_3 celui de C .
On trouve aisément que: $aO_2 = bO_1 = O_3$.

On peut identifier les 3 zéros, et poser: $aO = bO = O$.

Pour les multiplicités on bon a: $a+a=a$,
et par suite pas de soustraction, on définira le zéro
comme l'élément qui vérifie l'équation:

$$a+O=a$$

quel que soit a .

Classification des algèbres spéciales. C'est bon d'étudier chaque algèbre avec son interprétation, la plus simple et la plus générale. L'algèbre ordinaire trouve son interprétation dans la théorie des grandeurs.

1^{re} distinction, fondée sur les 2 genres d'addition:

Algèbre non-numérique où: $a = a+a$.

Pas de nombre, ni de grandeur. C'est l'Alg. de la Logique.

L'interprétation la plus simple est celle qui s'applique aux régions de l'espace (séparées ou non).

Algèbre numérique où: $a+a=2a$.

Coefficients numériques (en lettres grecques) Interprétation: multiplicités de positions (cà d. espace projectif.) où l'addition a les propriétés de l'addition numérique.

Les algèbres numériques se classent d'après la multiplication: algèbres linéaires, et algèbres comprenant plusieurs multiplicités. On ne peut réduire toutes les algèbres à la forme linéaire que par artifice. Le Calcul de l'extension fournit des Algèbres de toute espèce. L'Algèbre d'un ordre trouve son interprétation dans les multiplicités extensives, c.à.d. dans des espaces de diverses formes. Ainsi c'est l'espace (généralisé) qui fournit une interprétation à toutes les Algèbres spéciales; de sorte que l'Algèbre universelle est une Géométrie générale.

Livre II. L'Algèbre de la Logique symbolique.

L'Univers i est défini par: $ai = a$
 Eléments supplémentaires (négation)

Réciprocité des deux opérations.

Interprétation: application aux régions de l'espace.

Régions incédentes; le calcul des subscriptions est analogue à celui des inégalités. $(y < x) = (y = xy)$

$$(z < xu + yv) < (x < x + y)$$

$$[(x + u)(y + v) < x] < (xy < x)$$

$$(xy = xz) < (xy' = xz')$$

Ch. II. Développement. Elimination.

Si: $c = ax + bx'$, $ab < c < a + b$.

Forme normale: $ax + bx' = cx + dx'$.

Équivalent aux 2. $ax = cx$, $bx' = dx'$.

Les discriminants sont. $A = ac + a'c'$

Résultante de l'équation. $B = bd + b'd'$

$$A'B' = 0.$$

L'éq. se ramène à: $A'x + B'x' = 0.$

Si l'on a n équations semblables, et se trouve fait:

$$\bar{A}' = \sum A'_i$$

$$\bar{B}' = \sum B'_i$$

$A'B' = \sum A'_i B'_i$ Résultante. $A'B' = 0.$

Equation unique: $A'x + B'x' = 0$

Equation à 2 inconnues (et à 2 membres). Si les discriminants sont A, B, C, D , l'équivalent à:

$$A'xy + B'xy' + C'x'y + D'x'y' = 0.$$

Résultante: $A'B'C'D' = 0.$

Extension à un nombre quelconque de inconnues.

C'est la résultante complète, car il suffit qu'elle soit nulle pour que l'équation soit résoluble.

Equations limitantes et non limitantes (par rapport à un, plusieurs ou toutes les inconnues)

Pour qu'une eq. soit non limitante pour un ensemble de inconnues, il faut et il suffit que la résultante de leur élimination se réduise à une identité.

(des autres inconnues)
Toute eq. peut être rendue non limitante par rapport à plusieurs inconnues, en leur substituant leurs solutions gén. en fonctions de ces discriminants.

Champ d'une expression. Fonction limite, illimitée.

Puis on divise les constituants en 2 groupes d'équations dont chacun doit être contenu dans la somme d'une moitié des discriminants. On subdivise ensuite, et l'on obtient l'expression générale de chaque constituant; d'où l'on conclut par addition celle de chaque inconnue. - Pour 2 inconnues, on trouve:

$$x = a'(c+u)(d+p) + b'(d+u')(c+p)$$

$$y = a'(b+u)(d+p) + c'(d+u')(b+q')$$

Solution symétrique de l'équation à 3 inconnues.

Soustraction et Division.

$x + b = a$ $b < a$ $x = ab' + au$ $(b+a) - b = a + b$	$bx = a$ $a < b$ $x = a + b'v$ $ba : b = a : b.$
---	---

Exception à la loi associative.

$$(a+c) - (b+c) = a-b, \text{ si } ab'c' = ab', a+c=a,$$

càd si: $c < b.$

$$ac : bc = a : b, \text{ si } ac = a, b' + c' = a'b'.$$

càd si: $b < c.$

Formules analogues à celles de De Morgan:

$$(a-b)' = a' : b' \quad | \quad (a : b)' = a' - b'.$$

Ch III. Expressions existentielles.

xj signifie que x existe: $x \neq 0.$

$x+w$ signifie que x n'est pas tout: $x \neq 1.$

Le signe d'égalité = signifie que le second membre
résulte du premier (mais non inversement)

$$(xyz)j \equiv (xj, yj, zj)j.$$

$$(x+y)j \equiv xj + yj.$$

j , symbole affaibli, implique seulement alternative.

$$xj + yj + zj + \dots = (x + y + z + \dots + 0)$$

Échec à la loi distributive de l'addition.

$$(x+y+z+w) \equiv (x+w) + (y+w) + (z+w) + w$$

$$xy + w \equiv (x+w)(y+w)$$

w , symbole affaibli, impliquant alternative.

Tout symbole fort absorbe en symbole faible.

$$(xj)' \equiv x' + w,$$

$$(x+w)' \equiv x'j.$$

Donc: $j' = w,$

$$w' = j$$

Lettres ombrées. $x\alpha = xaj$

α indique l'affirmation que xa existe (n'est pas nul)

$$(x + \alpha') = x + a' + w$$

indique que x ne contient pas tout a (que $x + a'$
n'est pas tout)

Les symboles $x\alpha$, $x + \alpha'$ sont indivisibles, et représentent
proprement x , avec une assertion relative à x .

À part cela, les lettres ombrées obéissent aux lois
du calcul logique. Seulement on a:

$$x(\alpha + \beta) \equiv x\alpha + x\beta.$$

α, β formés affaiblis (alternatives).

$$x\alpha + x\beta \equiv x\alpha \cdot x\beta$$

$$x\alpha + \beta \equiv (x + \beta)\alpha.$$

$$xy.j' = x\eta.y\xi$$

$$x+y+w = (x+\eta) + (y+\xi)$$

Elimination. Si: $f(x, y, z, \dots)j$, son maximum
ne peut être nul; donc: $(a+b+c+\dots)j$

Si: $f(x, y, z, \dots) + w$, son minimum
ne peut être 1; donc: $abc\dots + w$.

Solution des expressions existentielles à une inconnue

$$ax.j: \quad x \equiv wa.j + ua' \equiv p\alpha \equiv x\alpha.$$

$$bx'.j: \quad x \equiv (wb.j + u')' \equiv (x'\beta)' \equiv x + \beta'$$

$$(ax + bx')j: \quad \equiv ax_j + bx'_j, \quad x \equiv (x + \beta'_1)\alpha_1$$

α_1, β_1 formés affaiblis (alternatives) si $ab=0$.

Si $ab.j$, x reste indéterminé.

$$ax + w: \quad x + w, \quad \text{si } a = 1.$$

$$b'x + w: \quad xj, \quad \text{si } b = 1.$$

$$ax + b'x + w: \quad x = (x + \beta_1)\alpha'_1 \quad \text{si } a'b' = 0.$$

Equations et expressions existentielles à une inconnue

Cf. Miss Ladd, op. Studies in Logic (Johns Hopkins Univ.)

Ch. IV: Application à la Logique.

Pour exclure les formes négatives, on écrit;

$$aj < bj \quad \text{au lieu de} \quad a < b$$

$$\text{ou: } aj \equiv ab.j \quad \text{---} \quad a = ab.$$

$$\text{et: } a + w \in b + w \quad \text{ou: } a + w \equiv (a + w)(b + w)$$

pour exclure le cas où $b = 1$.

Syllogismes classiques (Camenos pro Camenes)

Syllogismes à prémisses trop fortes:

Darapti: $bj \equiv bc.j$, $bj \equiv ab.j$,

donc: $bj = bac.j$, donc: $ac.j$. (Darii)

Felapton: $bc = 0$, $bj \equiv ab.j$,

donc: $abc.j$, donc: $ac.j$. (Perio)

Bramantip: $cj \equiv bc.j$, $bj \equiv ab.j$,

$bc.j \equiv abc.j$, donc: $ac.j$. (Darii)

Camenos: $cj \equiv bc.j$, $ab = 0$,

$bc.j \equiv a'bc.j$, donc: $a'c.j$ (Perio.)

Fesapo: $bc = 0$, $bj \equiv ab.j$,

$ab.j \equiv abc.j$, donc: $ac.j$. (Perio)

Ch. V: Interprétation propositionnelle

Conjonctifs (\times) disjonctifs ($+$)

Équivalence: identité des motifs d'assentiment.

Identification avec l'Algèbre de la Logique.

Le Léa exprime l'absence de tout motif, donc le rejet de la proposition.

Le Univers est l'ensemble des propositions admises comme absolument vraies: soit Loix de la pensée, soit conventions reçues (jeu de billard).

Les prop = 0 sont condamnées par elles-mêmes.

Les prop = 1 sont évidentes par elles-mêmes.

Extension de la conversion: convertir une prop. c'est en déduire une autre au moyen des lois du Univers.

Contradictaires: $xx' = 0$, $x + x' = 1$.

Extension de cette notion, si 1 désigne d'autres prop. que les lois de la pensée.

$x < y$ signifie que les motifs d'assentiment de x sont compris dans ceux de y .

Expressions existentielles: $x \neq y$ signifie que x n'est pas absurde (contraire aux lois du Univers).

$x + w$ exprime que x n'est pas évidente.

$$xy = xy.j$$

$$x + \bar{y} = x + \bar{y} + w.$$

Méthode de MacColl pour traduire les propositions traditionnelles A, E, I, O.

Predication primitive: «Ceci est un A» = x ,
 x' est une negation primitive.

$x = 0$ signifie que le prédicat ne s'applique à rien;

$x = 1$ ————— s'applique à tout.

Les prédictions primitives combinées doivent s'entendre comme appliquées au même sujet.

Les lettres prop. A, E, I, O se traduisent par :

$$x = xy, \quad x = xy', \quad xy.j, \quad xy'.j.$$

ou: $x.j \equiv xy.j$, pour exclure les cas négatifs.

Livre III: Multiplicités de positions.

Géométrie projective à n dimensions.

Les lettres grecques désignent des nombres. Un extraordinaire est:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

e_1, e_2, \dots, e_n étant n éléments de la multiplicité.

Intensité: propriété secondaire. Deux objets sont semblables ou équivalents quand ils ne diffèrent que par l'intensité. L'intensité de αe est α . Un objet de intensité 0 est 0. — L'équation:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0 \quad \text{implique les } \underline{n} \text{ équations: } \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0.$$

Deux objets sont congruents ($a \equiv b$) quand ils ne diffèrent que par l'intensité: $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$.
 $a = \lambda b$.

Les n unités e définissent une région à $(n-1)$ dim —
k unités e définissent une sous-région de $(k-1)$ dim.

Les extraordinaires sont dépendants les uns des autres, quand il y a entre eux une relation linéaire.

On ne peut trouver plus dans une région de $(n-1)$ dim. plus de n extraordinaires indépendants.

Tout ensemble de n extraordinaires indépendants
définit la région complète à $(n-1)$ dimensions.

Une sous-région coordonnée est définie par k unités e.
Région à 1 dimension: $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$.

à 2 dim: $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$.

Lieu. Défini par un ou plusieurs eq. de la forme:
 $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$.

Un lieu défini par k eq. ^{indépendantes} a $(n-k-1)$ dimensions.

Un lieu défini par k eq. linéaires contient $(n-k)$
éléments indépendants. C'est un lieu plan. Donc
un lieu plan est une sous-région.

Un lieu défini par $(k+l)$ eq. dont k sont linéaires
est un lieu de $(n-k-l-1)$ dim. dans une région
de $(n-k-1)$ dimensions.

Un lieu qui a une dimension de moins que la
région qui le contient est un lieu surface, défini
par une seule équation non linéaire dans cette région.

Un lieu à 1 dim. est un lieu ligne. S'il est plan, droite.

Un lieu de $(k-1)$ dim. non contenu dans une région
de k dim. est un lieu courbe. (dans le plan)

Une courbe plane est un lieu-surface. Une courbe
gauche est un lieu-courbe; une surface est un lieu-surface.

Chapitre II. Lignes droites et plans.

Un point p sur une droite aa' est:

$$p = \xi_1 a + \xi_1' a'$$

Rapport anharmonique de 2 points: $\frac{\xi \xi'}{\xi_1 \xi_1'}$

Rapport harmonique = -1. $\xi a + \xi' a', \xi_1 a - \xi_1' a'$

Rangis homographiques.

Transformations linéaires. 3 classes:

- 1° transf. hyperboliques, où les 2 points doubles sont réels;
- 2° elliptiques, où ils sont imaginaires;
- 3° parabolique, où ils sont confondus.

Dans une région de $(k-1)$ dimensions, $k+1$ points sont reliés par une équation linéaire. Ainsi:

3 points sur une droite; 4 points sur un plan

Figure de référence: formée en joignant 2 à 2 les n points e_1, e_2, \dots, e_n .

Étant pris un point sur chaque arête de la figure, la condition nécessaire et suffisante pour que tous ces points soient coplanaires est que les 3 points situés sur les arêtes qui joignent 3 sommets quelconques soient collinéaires.

Perspective. Si les n sommets de 2 figures de référence sont en perspective, les arêtes homologues concourent dans un même plan. Et réciproquement.

Quadrilatère complet.

Chap. III. Quadriques.

Equation d'une quadrique: $(\alpha \mathcal{L} x)^2 = 0$.

Pôles et polaires: Equation: $(\alpha \mathcal{L} x \mathcal{L} x') = 0$.

Sollicitant x' est le pôle du plan $(\alpha \mathcal{L} x \mathcal{L} x') = 0$.

Génératrices: régions planes / réelles ou imaginaires
contenues dans la quadrique; définies par $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$
points indépendants, suivant que n est pair ou impair.
Coordonnées conjuguées. Soit $m = \frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$:

$j_1 j_2 \dots j_m \quad k_1 k_2 \dots k_m$

ces $2m$ éléments sont sur la quadrique; et chaque
 j est le polaire réciproque des k qui n'ont pas le
même indice, et inversement.

Si un point j_i est tel que toute droite qui passe par
lui et un autre point de la quadrique y est contenue
entièrement, la quadrique est conique.

Liens courbes définies par k quadriques.

Quadriques fermées: quand il y a des points tels
que toute droite menée par eux coupe la quadrique
en 2 points réels. Un tel point est dit intérieur.

Les autres points (non situés sur la quadrique) sont
dits extérieurs.

Relations du pôle et polaires à l'existence ou à l'absence d'intérieur.

Une quadrique fermée n'a pas de génératrices réelles.
Leur points intérieurs ou deux points extérieurs ont
donnent le même signe à $(\alpha \mathcal{L} x)^2$; un point intérieur
et un point extérieur donnent des signes contraires.

Quadriques conjuguées : leur caractéristique
Equations réciproques (càd tangentes elles.)

Chap. IV Intensité.

Equation définissant l'intensité α de $\Sigma \alpha e$:

$$\alpha = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

f est une fonction homogène du 1^{er} degré. Formes
générales: $\Sigma \left[\frac{q_\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{q_\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \right]^{\frac{1}{\lambda-\mu}}$

On adoptera la forme: $q_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$.

Les coefficients qui vérifient cette équation sont
les coefficients de l'élément d'intensité 1.

Lieu d'intensité zéro: $q_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$.

Chaque point d'intensité zéro doit avoir au moins
une coordonnée infinie.

Lieu plan d'intensité zéro. L'équation qui
définit l'intensité est: $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = 1$.

Lieu quadrique d'intensité zéro. L'intensité du
point x est $+\left[(\alpha x x)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

Hyades éléments d'intensité imaginaires si la
quadrique est réelle (intérieurs ou extérieurs)

- Éléments antipodes et intensités opposées.

$$(\alpha x x)^2 = (\alpha x - x)^2 \quad x \text{ et } -x \text{ ont même intensité.}$$

On les considère comme opposés, bien que $x \equiv -x$.

Une région à 2 dimensions est illimitée et fermée.

Elle en coupe une autre en 2 éléments antipodes.

Segment intercepté par deux éléments e, e' :

Si le lieu d'intensité 0 est linéaire, ce segment est celui qui ne coupe pas celui-ci.

Si le lieu d'intensité 0 est une quadrique réelle et close, et si l'on identifie les éléments antipodes $+x, -x$, le segment ^{e, e'} est celui qui ne rencontre pas la quadrique.

Si le lieu d'intensité 0 est une quadrique imaginaire, et si l'on distingue les deux éléments antipodes, le segment e, e' est celui qui ne contient aucun ~~d'un~~ ^{des} deux antipodes $e, -e$.

Livre IV. Calcul de l'extension.

Ch I: Multiplication combinatoire.

$$ab = \sum \alpha_e \cdot \sum \beta_{e'} = \sum \sum (\alpha_e \beta_{e'} e e')$$

Les n^2 éléments $e e'$ forment une multiplicité du 2^e ordre; et ainsi de suite. Mais ces multiplicités peuvent être déterminées par des équations de conditions.

Equations de conditions invariantes. Deux types:

1° $e e' + e' e = 0, \quad e e' = 0.$

2° $e e' = e' e$

Le 1^{er} type est la multiplication combinatoire qui obéit à la loi associative. Un produit change de signe chaque fois qu'on intervertit 2 facteurs voisins.

$$ab = \sum (\alpha_e \beta_{e'} - \alpha_{e'} \beta_e) e e'.$$

$$ab + ba = 0, \quad aa = bb = 0.$$

Un produit de plus de n facteurs est nul (car ces facteurs ne sont pas indépendants.)

Multiplicités dérivées. Il y a $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ combinaisons multiplicatives des n unités; elles définissent la multiplicité dérivée du k^{e} ordre. Celle du n^{e} ordre se réduit à l'élément e, e_1, \dots, e_n .

Les ~~pro~~ Grandeurs extensives. Le produit de k éléments indépendants définit une sous-région de $(k-1)$ dimensions. Deux produits congruents définissent la même sous-région à des intensités différentes. On peut identifier cette sous-région à l'élément de la multiplicité du k^{e} ordre défini par ce produit. La multiplicité de positions est alors une multiplicité extensive. Le produit de k éléments du 1^{er} ordre ^(points) est un élément régional ou une grandeur extensive du k^{e} ordre.

Grandeurs extensives simples et composées. Les éléments de la mult^e dérivée qui sont des produits d'éléments du 1^{er} ordre sont appelés simples; eux seuls seront appelés éléments régionaux.

Un élément composé est la somme d'élém. simples. Le produit d'un élément du h^{e} ordre et d'un du k^{e} est un élément du $(h+k)^{\text{e}}$.

Le produit de deux régions est nul quand elles ont un ou plusieurs éléments communs. Sinon, il est la région qui les contient toutes deux. Tous les éléments du $(n-1)^{\text{e}}$ ordre sont simples.



Chap. II: Multiplication régressive.

La mult. combinatoire est progressive: $h+k < n$.

La mult. régressive s'applique au cas où: $h+k > n$.

Suppléments. E_k étant le produit de k unités, son supplément $|E_k$ est le produit des $(n-k)$ autres totales.

$$E_k E_{n-k} = 1. \quad \text{donc:} \quad E_k |E_k = 1.$$

$$|e_1 e_2 \dots e_n| = 1, \quad \text{donc:} \quad |1| = 1.$$

Le symbole $|$ est distributif.

$$\|E_k = (-1)^{k(n-k)} E_k \quad \|A_k = (-1)^{k(n-k)} A_k.$$

Définition de la multiplication régressive: $h+k > n$:

$$|A_h A_k = |A_h |A_k$$

Le produit régressif de 2 grandeurs ^{à pour} ~~est le~~ supplément le produit de leurs suppléments.

La formule précédente vaut également pour un produit progressif.

Produits purs et mixtes. Un prod. pur est associatif.

Règle du facteur médian. $E_h E_k \cdot E_h E_l = (E_h E_k E_l) E_h$.

$$A_h A_k \cdot A_h A_l = (A_h A_k A_l) A_h$$

quand $h+k+l = n$ ou $2n$.

Règle générale: Si A_h, A_k sont 2 ~~grandeurs~~ ^{simples}, $h+k = n+m$, elles ont une région commune C_m de $(m-1)$ dim. Alors: $A_h = B_{h-m} C_m$, $A_k = C_m B_{k-m}$.

$$A_h A_k = B_{h-m} C_m \cdot A_k = (B_{h-m} A_k) C_m.$$

$$= A_h \cdot C_m B_{k-m} = (A_h B_{k-m}) C_m.$$

La multiplication régressive est indépendante des éléments de référence.

En résumé, si $h+k < n$, $P_h P_k$ représente la région qui contient les 2 régions P_h, P_k , à moins qu'elles n'empiètent, alors $P_h P_k = 0$.

Si $h+k > n$, $P_h P_k$ représente la région commun aux 2 régions P_h, P_k , à moins qu'elles n'aient en commun une région d'ordre supérieur à $h+k-n$, alors $P_h P_k = 0$.

Si $h+k = n$, $P_h P_k$ est un nombre.

Théorèmes de Müller (Math. Annalen, 1897)

Applications et exemples. Eq. de la sous-région P :

$$\kappa P = 0. \quad (\kappa \text{ est un point})$$

Condition pour que le plan X_{n-1} contienne P :

$$X_{n-1} P = 0.$$

Conditions pour que le point κ appartienne à la droite ab , au plan abc , à la région $abcd$:

$$\kappa ab = 0, \quad \kappa abc = 0, \quad \kappa abcd = 0.$$

Dans un espace à plus de 2 dim, le produit de deux lignes et d'un plan est régressif. Deux lignes ab, cd se coupent si:

$$abcd = 0.$$

Point d'intersection d'une ligne ab et d'un plan P_{n-1} :

$$P_{n-1} . ab = (P_{n-1} b) a - (P_{n-1} a) b.$$

Si la ligne est contenue dans le plan, on a:

$$P_{n-1} b = P_{n-1} a = 0, \quad P_{n-1} \kappa ab = 0.$$

L'intersection de 2 plans (d'ordre $n-1$) est un sous-plan (d'ordre $n-2$.)

Si 2 plans ont un sous-plan commun, les 2 points d'intersection sur une droite q'q' ont un rapp. anharmon. déterminé.

Chap. III. Suppléments.

Le complément d'un élément P_k est un élément $|P_k$ d'ordre $n-k$. $|x$ est le plan supplémentaire du pt. x .

Si P_k est le produit de k points, son complément est la région commune aux k plans supplémentaires.

Des points situés chacun dans le plan supplémentaire de l'autre sont mutuellement normaux.

Points stibi-normaux. Quadrique stibi-normale, lieu de ces points.

Système normal de points: ensemble de n points indépendants mutuellement normaux.

Un point p a son intensité normale quand:

$$p|p = 1.$$

Extension de la définition des suppléments. Cette théorie est une extension de celle des figures polaires réciproques.

Différentes espèces de suppléments.

Points et droites normales. Les couples de points normaux sur une droite forment une involution dont les points doubles sont les points stibi-normaux.

Régions mutuellement normales.

Éléments sibi-normaux. Dans une ^{zone} région définie par k éléments sibi-normaux indépendants et mutuellement normaux, chaque élément est sibi-normal; et deux éléments quelq. sont normaux entre eux.

Plans sibi-normaux: a étant un p. sibi-normal, le plan $|a$ est tangent à la quadrique sibi-n. en a .

Eq. de la quadrique en plans: $(X|X) = 0$.

condition pour que le pl X contienne son suppl $|X$.

Région complète à trois dimensions.

Multiplication interne: consiste à considérer le signe $|$ comme un signe de combinaison: $P_h | P_k$.

Opposé à la mult^{on} progressive et régressive.

La mult^{on} interne est toujours relative à une quadrique sibi-normale, dont l'eq. est: $(x|x) = 0$.

Règle du ^{suppos} facteur moyen.

Multiplication interne de régions normales.

Formule générale pour la multiplication interne.

Equation plane d'une quadrique.

Chap. IV. Géométrie descriptive.

Deux éléments qui ne diffèrent que par l'intensité seront congruents.

Le produit de 2 points est la ligne qui les joint;
le produit de 2 droites est leur point d'intersection.

Exemple de la méthode.

Construction de Steudt.

On peut construire sur la ligne ac tout point $a + \xi c$, ξ étant un nombre réel quelconque, et dans le plan abc , tout point $a + \xi b + \eta c$.

Constructions de Grassmann. Dans le plan aa_1a_2 , construire le point $a + \varphi(\xi_1, \xi_2)(a_1 + a_2)$, φ étant une fonction entière homogène de ξ_1, ξ_2 .

Projection. Définition de la projectivité.

Deux points en ligne droite sont projectifs avec trois autres points en ligne droite.

k points d'une sous-région de $k-2$ dimensions sont projectifs avec k points d'une autre sous-région de $k-2$ dimensions. — Il faut $k-1$ projections.

Le type le plus général de transformation projective équivaut au type le plus général de transformation linéaire.

Chap. V: Géométrie descriptive des coniques et cubiques.

Equation d'une conique: $xaBcDex = 0$.

C'est l'équation générale du second degré.

Soit: $b = B.ce$, $d = D.ca$, $g = BD$.

Autre forme de l'éq.: $(xa.bg)/(eb.ad)(dg.ex) = 0$

expression du théorème de Pascal: la conique passe par les 5 points a, b, d, e, g .

Forme plus générale: $xa.B_1a_2B_2...B_{n-1}a_nx = 0$.

Si les côtés d'un polygone passent par n points fixes et que $(n-1)$ sommets décrivent $(n-1)$ droites, le n^{e}

Sommet décrit une conique. (Grassmann.)

Construction linéaire des cubiques. Les équations suivantes caractérisent les points d'une cubique, mais ne permettent pas de les construire :

$$x_a A a, . x_b B b, . x_c = 0.$$

$$x_a B c D x_{D, c, B, a, x} = 0. \quad (\text{on peut écrire } B_1 = B.)$$

ou: $x. x_a B c D. x_a B, c, D, = 0.$

$$x_a A. x_b B. x_c C = 0.$$

Construction de Chasles.

Chap. VI: Matrices.

Une matrice représente une transformation linéaire.

$$\phi = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{e_1 e_2 \dots e_n} \text{ comme coefficient, signifie qu'on}$$

remplace dans le produit e_k par a_k . (Cayley.)

L'opérateur ϕ équivaut à une matrice formée des coefficients α de la substitution linéaire des a aux e

$$a_k = \alpha_{k1} e_1 + \alpha_{k2} e_2 + \dots + \alpha_{kn} e_n$$

Si deux matrices opèrent sur n éléments indépendants d'ordre 1^{er} donnent les mêmes résultats, elles sont équivalentes dans tous les cas.

La somme de 2 matrices équivaut à une seule matrice quand elles opèrent sur un même élément d'ordre 1^{er} .

Le produit de 2 matrices équivaut dans tous les cas à une seule matrice. Il est associatif.

Si une matrice est susceptible de 2 formes équivalentes :

$$\begin{array}{ccc} a_1, a_2, \dots, a_n & \text{et} & d_1, d_2, \dots, d_n \\ c_1, c_2, \dots, c_n & & e_1, e_2, \dots, e_n \end{array}$$

on a l'égalité: $\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{c_1 c_2 \dots c_n} = \frac{d_1 d_2 \dots d_n}{e_1 e_2 \dots e_n}$.

Le rapport: $\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{c_1 c_2 \dots c_n}$ = le déterminant associé,
cà d le déterminant des coefficients α .

Si les n éléments du numérateur ne sont pas indépendants, la matrice peut être mise sous une forme telle que quelques-uns soient nuls. Le déterminant associé est alors nul. La région correspondante (au dénominateur) s'appelle espace nul. L'ordre de nullité est le nombre des éléments nuls.

La nullité du produit de deux matrices n'est pas inférieure à la plus grande de leurs nullités, ni supérieure à la somme de leurs nullités. (Sylvester)

Points latents: point x tel que: $qx = px$,
 p étant un nombre, appelé racine latente de la matrice.
La transformation q ne change que l'intensité des points latents.

Si les n racines latentes sont inégales, il y a n points latents indépendants, qui leur correspondent respectivement.

Régions semi-latentes: définies par k points latents.
($k-1$) dimensionnelles si toutes les racines latentes sont inégales.

Si X est un élément régional appartenant à une région semi-latente, qX appartient à la même région.

Equation identique de la matrice:

$(q-p_1)(q-p_2)\dots(q-p_n)x=0$
 quel que soit x , p_1, p_2, \dots, p_n étant les n racines.

Région latente. Quand une racine est répétée k fois, et lui correspond ^(au plus) k points latents indépendants qui définissent une région latente, ^(de k dimensions) c'est-à-dire telle que chacun de ses points est un point latent.

Espaces de régions semi-latentes.

Vacuité d'une matrice. L'espace nul ^{correspond} est la région latente qui correspond à une racine latente nulle. Si cette racine est répétée α fois, la matrice a une vacuité d'ordre α (\geq l'ordre de sa nullité).

Matrices symétriques. Pour que $x|qy = y|qx$, il faut que la matrice soit symétrique par rapport à la diagonale principale, quand les éléments du dénominateur forment un système normal.

Matrices symétriques et supplémentes.

Correspondance des plans aux points: $X = |qx$.

Matrices obliques: telles que $\alpha_{hk} + \alpha_{kh} = 0$, et que les éléments de la diag. princ. soient nuls.
 Alors: $x|qx = 0$, $x|qy + y|qx = 0$.

Livre V: Multiplicités extensives à 3 dimensions.

Chap. I: Systèmes de forces.

Théorie non-métrique des forces. Dans une multiplicité extensive à 3 dimensions, les éléments linéaires (doux de sens, de continuité, et additifs) sont analogues à des forces. ~~A toute~~ Toute notion métrique est exclue, ainsi que l'axiome des parallèles (par de parallélogramme de forces.)

Récapitulation de formules.

a_1, a_2, a_3 étant des points, A_1, A_2, A_3 des plans, on a:

$$a_1, a_2, a_3. A_1, A_2, A_3 = \begin{vmatrix} a_1, A_1 & a_1, A_2 & a_1, A_3 \\ a_2, A_1 & a_2, A_2 & a_2, A_3 \\ a_3, A_1 & a_3, A_2 & a_3, A_3 \end{vmatrix}$$

de même quel que soit le nombre des a et des A :

$$a_1, a_2. A_1, A_2 = a_1, A_1. a_2, A_2 - a_1, A_2. a_2, A_1.$$

Multiplication interne

$$abc | def = \begin{vmatrix} a|d, & a|e, & a|f \\ b|d, & b|e, & b|f \\ c|d, & c|e, & c|f \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

Propriétés élémentaires d'une force simple.

Une force est le produit de 2 points ou de 2 plans. Elle peut se décomposer en une somme de 2 forces concourantes dans le même plan qu'elle; ou de deux forces dont l'une passe par un point donné et l'autre est située dans un plan donné.

Propriétés élémentaires d'un système de forces.

Un système quelconque S peut s'écrire :

$$S = ap + AP$$

a étant un point donné et A un plan donné.

$$aA.S = a.AS + aS.A$$

Un système S peut se réduire à la somme de 2 forces :

$$S = ab + cd.$$

Condition pour que S se réduise à une force unique :

$$SS = 0, \quad \text{ou :} \quad abcd = 0.$$

Lignes conjuguées : telles que ab et cd

La conjuguée de ab est : $S - \frac{1}{2} \frac{(SS)}{(abS)} ab$

de AB est : $S - \frac{1}{2} \frac{(SS)}{(ABS)} AB$

Lignes, points et plans nuls.

Moment de S par rapport à I : $I.S.$

Ligne nulle, si : $I.S. = 0.$

Les lignes nulles forment un complexe linéaire.

Plan nul du point a : $a.S.$

Point nul du plan A : $A.S.$

Propriétés des lignes nulles.

Toutes les lignes nulles passant par le p. a sont dans le plan nul du point a — Prop. corrélatrice.

Lignes en involution : 6 lignes nulles par rapport à un système doivent satisfaire une condition.

Systèmes réciproques : $SS' = 0.$

Formules pour les systèmes de forces.

Chap. II: Groupe de systèmes de forces.
Tout système S peut s'écrire sous la forme:

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \dots + \lambda_6 S_6$$

S_1, S_2, \dots, S_6 étant indépendants.

Groupe double (à 1 dim) obtenu en donnant à λ_1, λ_2 toutes les valeurs.

triple (à 2 dim) — $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ —

quadruple (à 3 dim) — $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ —

quintuple (à 4 dim) — $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 : \lambda_5$ —

Un groupe de $k-1$ dim. est défini par k systèmes indépendants qui en font partie ou par $6-k$ équations linéaires entre ses coordonnées λ .

Systèmes réciproques à des groupes: c'est réciproques à tous les systèmes d'un même groupe.

Tous les systèmes réciproques à un groupe de $k-1$ dimensions forment un groupe réciproque de $5-k$ dimensions.

Lignes nulles communes et forces directrices.

Lignes nulles communes à tous les systèmes du groupe.

Les systèmes qui se réduisent à une force unique s'appellent forces directrices du groupe.

Les lignes nulles communes d'un groupe sont les lignes directrices du groupe réciproque, et inversement.

Chaque ligne nulle commune d'un groupe coupe toutes les lignes directrices du groupe, et inversement.

Groupe quintuple. N'a aucun ligne nulle commune.

excepté quand le système réciproque se réduit à une force.

Les lignes directrices d'un groupe quintuple forment un complexe linéaire.

Groupe quadruple et doubles.

Un groupe double a en général deux lignes directrices ;
quadruple — deux lignes nulles communes.

L'ensemble des lignes nulles communes d'un groupe double forme une congruence. Ce sont les lignes qui coupent les 2 lignes directrices du groupe.

L'équation des directrices : $(\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \dots + \lambda_k S_k)^2 = 0$, s'appelle équation directrice du groupe.

Un groupe double dont l'équation directrice a 2 racines égales s'appelle parabolique.

Il n'y a qu'une directrice, qui est ^{une} la ligne nulle commune aux autres systèmes du groupe.

Rapport au harmonique de systèmes.

Le rapp. anh. des 4 points nuls d'un plan par rapport à 4 systèmes d'un groupe double est le même pour tous les plans. C'est par définition le rapp. anh. de ces 4 systèmes. (Tous les points nuls sont collinéaires.)

Le groupe se divise en couples de syst. réciproques ; les ou la directrice étant leur propre réciproque. Deux syst. réciproques sont conjugués harmoniques par rapport aux deux directrices.

Un groupe forme donc une révolution qui a pour foyers les deux directrices. Il est elliptique, si les foyers sont imaginaires; hyperbolique, si réels. Les mêmes propriétés appartiennent au groupe des complexes linéaires qui ont en commun une même congruence.

Groupe double suisupplémentaire.

On prend le supplémentaire $|S$ par rapport à une quadrique donnée. Les 2 systèmes S et $|S$ définissent un groupe double, dit suisupplémentaire, parce qu'il contient le supplémentaire de chacun des systèmes.

Un système qui n'est pas suisupplémentaire a en gén. 2 lignes conjuguées qui sont supplémentaires (cà d polaires réciproques par rapport à la quadrique). En gén. un complexe linéaire a quatre lignes qui sont génératrices d'une quadrique donnée qzqz, deux d'un système et deux de l'autre.

Groupe triples.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dont l'éq. est: } xS_1 \cdot xS_2 \cdot S_3 = 0. \end{array} \right.$$

Les lignes nulles communes d'un groupe G sont les génératrices d'une quadrique; les lignes directrices (l. nulles communes du groupe réciproque G') sont les génératrices de l'autre système de la même quadrique. Inversement, toute quadrique définit un couple de groupes triples réciproques.

À chaque ligne directrice correspond un sous-groupe

double parabolique dont elle est directrice.

En g^{en}, une quadrique g^{en}ra a deux g^{en}ratrices d'un système et deux de l'autre parmi les lignes nulles d'un système de f^{ur}us g^{en}ra. Par exception, elle peut avoir toutes les g^{en}ratrices d'un système, ou bien une seule.

Trois conjugués des systèmes d'un groupe triple.
On prend S_3 réciproque des 2 sous-groupes définis par S_1, S_2 ; et dans ce sous-groupe, on prend S_1 et S_2 réciproques. Alors chacun des trois est réciproque du sous-groupe formé par les 2 autres.

Chap. III: Invariants des groupes.

Un invariant d'un groupe de $(k-1)$ dimensions est une fonction qui se reproduit elle-même par la substitution (linéaire) de k syst. indépendants à k autres syst. indépendants, multipliée par un facteur numérique qui est une puissance entière du déterminant de la substitution.

Invariants nuls d'un groupe double:

$$x S_1 \cdot x S_2,$$

$$X S_1 \cdot X S_2.$$

Ces sont la ligne nulle commune qui passe par le p. x et celle qui est contenue dans le plan X .

Invariants harmoniques d'un groupe double.

$$H(x) = x S_1 \cdot S_2 - x S_2 \cdot S_1 \quad H(X) = X S_1 \cdot S_2 - X S_2 \cdot S_1$$

$H(x)$ est, sur la ligne nulle commune qui passe par x ,

Le conj. harm. de x par rapp. aux 2 pl. où cette ligne
coupe les 2 directrices.

$H(x)$ est un plan passant par la L. melle comm.
situé dans le pl. X , et conj. harm. de X par rapp.
aux 2 pl. qui contiennent la L. melle comm. et les
2 directrices.

Si le groupe est parabolique, et a D pour unique
directrice, $H(x)$ est le point nul du plan xD ,
et $H(X)$ est le plan nul du point XD .

Si le p. x est pour lieu le pl. X , le pl. $H(x)$ a pour
lieu le pl. $H(X)$.

Formule remarquable: $XH(x) = xH(X)$.

Invariants pôles et polaires d'un groupe triple

Chap. IV. Matrices et forces.

Transformations linéaires à 3 dimensions.

On considérera des matrices de nullité zéro.

Région latente: où pour tout x on a: $qx \equiv x$.

Semi-latente: où l'on a: $qx = \gamma x + y$.

Une droite semi-latente a au moins un point latent.

Un plan semi-latent de 1^{er} esp. contient des droites semi-latentes (de 1^{er} espèce.)

Énumération des types de régions latentes et semi-latentes.

Soient $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ les 4 racines distinctes de la matrice q . Soient e_1, e_2, e_3, e_4 les points latents correspondants.

Les régions semi-latentes sont les 6 arêtes et les 4 faces du tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$.

Cas où une ou plusieurs racines sont répétées.

Matrices et forces.

Si $qS \equiv S$, le système S est un système latent de la matrice q .

Si tout système S d'un groupe G donne un système qS du même groupe, G est un groupe semi-latent de la matrice q .

Systèmes latents et groupes semi-latents.

Une force sur une ligne semi-latente est latente.

Énumération des types de systèmes latents et de groupes semi-latents.

Transformation d'une quadrique en elle-même.

Une matrice peut transformer une quadrique en elle-même, quand le groupe triple qui la définit est semi-latent. La transformation est directe, si chaque génératrice est transformée en une génératrice du même système; et oblique, si — en une génératrice de l'autre système.

Transformation directe des quadriques.

Transformation oblique des quadriques.

Aucune génératrice n'est semi-latente.

Livre VI: Théorie de la Métrique.

Chap. I: Théorie de la distance.

Dans une multiplicité de positions, il n'y a pas de relation définie entre 2 points, ni même entre 3, car si tout point p d'une ligne peut se représenter par: $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, le rapport ξ_1 / ξ_2 ne correspond à p que moyennant une hypothèse sur l'intensité des p, e_1, e_2 . Seul le rapport anharmonique de 4 points est une fonction indépendante de leurs intensités.

Une multiplicité spatiale est une mult. de positions où l'on a défini la relation quantitative de 2 points, appelée leur distance.

Axiome I: Deux points quelconques définissent une grandeur unique et déterminée, qui mesure leur séparation, et qui s'annule lorsqu'ils coïncident.

Axiome II: Si p, q, r sont 3 p en ligne droite, q

entre p et q , on a: $pq + qr = pr$.

Axiome III: a, b, c étant 3 p. gégus, si \underline{ab} et \underline{bc} sont finies, \underline{ac} l'est aussi. Si \underline{ab} est finie et \underline{bc} infinie, \underline{ac} ~~est aussi~~ ^{est aussi} infinie. Si \underline{ab} et \underline{bc} sont réelles, \underline{ac} l'est aussi.

Sur une droite, il aly a qu'un point situé à une distance donnée, dans un sens donné, d'un p. donné.

Rangées congruentes de points: so les distances homologues sont égales.

Deux rangées congruentes sont homographiques.

Deux rangées homographiques sont congruentes si trois points de chacune sont congruents.

Théorie de la distance de Cayley

Sur une droite, soit un couple de points absolu a_1, a_2 , et 3 p. gégus:

$$x_1 = \lambda_1 a_1 + \mu_1 a_2$$

$$x_2 = \lambda_2 a_1 + \mu_2 a_2$$

$$x_3 = \lambda_3 a_1 + \mu_3 a_2$$

Les rapp. anhar. $(x_1, x_2, a_1, a_2), (x_1, x_3, a_1, a_2), (x_2, x_3, a_1, a_2)$

sont: $\rho_{12} = \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_2 \mu_1}$, $\rho_{13} = \frac{\lambda_1 \mu_3}{\lambda_3 \mu_1}$, $\rho_{23} = \frac{\lambda_2 \mu_3}{\lambda_3 \mu_2}$

de sorte que: $\log \rho_{12} + \log \rho_{23} = \log \rho_{13}$.

Klein définit la distance de x_1, x_2 par l'expression:

$$\frac{\gamma}{2} \log \rho_{12}.$$

Si l'absolu est réel, γ doit être réel, et $\rho_{12} > 1$.

(définition hyperbolique) Si l'absolu est imaginaire, γ doit être imaginaire, la dist. est: $\frac{\gamma}{2} \log \rho_{12}$.

(définition elliptique)

Cas limite où les 2 p. α_1, α_2 coïncident. La distance des p. $e + \xi u, e + \eta u$ devient alors:

$$\delta(\eta - \xi) \quad (\text{diff. parabolique})$$

Théorème de Klein. Cette définition de la distance de 2 points est la seule compatible avec les propos. sur les rangs congruents.

Comparaison avec les axiomes de la distance:

La distance est (ax I) une relation entre 2 points, et non entre 4. Mais les 2 p. de l'absolu sont à dist. infinie, s'ils sont réels; ou bien sont imaginaires.

Multiplicités spatiales à plusieurs dimensions.

La partie d'une mult. spatiale où vaut la définition de la distance pour 2 p. réels (et où cette distance est réelle) s'appelle l'espace. Le reste de la multiplicité est l'Antiespace. (de la partie réelle)

Les points qui forment l'absolu sur chaque ligne forment une surface fermée ou imaginaire; comme elle coupe chaque ligne en 2 points, c'est une quadrique, appelée l'Absolu. L'espace entier est enveloppé par elle. La partie réelle de la mult. spatiale qui est intérieure à l'Absolu forme l'Antiespace.

Quand l'Absolu est réel: Géométrie ~~elliptique~~ ^{hyperbolique}

Quand il est imaginaire: Géométrie elliptique.
forme polaire, où $+x$ et $-x$ sont le même point à des intensités contraires; forme antipodale, où $+x$ et $-x$ sont des points distincts (antipodes) (G. Sphérique)
Cas limite: Géométrie parabolique de Klein.

Divisions de l'espace En G elliptique polaire, un plan ne partage pas l'espace, mais deux plans le partagent. Dans la forme anti-podale, un plan divise l'espace; de même en G hyperbolique (la droite réelle sort de l'espace, card. de l'Absolu.)

Espace elliptique Prenons pour l'absolu la quadrique subnormale:

$$x/x = 0,$$

et pour les réels ceux où: $x/x > 0$.

Distance de 2 points:

$$D(x, x_2) = \gamma \arccos \frac{\pm (x_1/x_2)}{\sqrt{(x_1/x_1)(x_2/x_2)}} = \gamma \arcsin \frac{\sqrt{(x_1/x_2)(x_2/x_2)}}{\sqrt{(x_1/x_1)(x_2/x_2)}}$$

Forme polaire. Soit x' le p. où la droite xy coupe le pl. polaire de x ; de même y' . Le segment xy est celui où ne se trouvent pas x', y' ; l'autre est le segment polaire.

Longueurs des segments dans la forme polaire.

Paradoxe: Si x est sur le segment $x'y'$, aucun des 3 points x, y, z n'est situé entre les 2 autres (écrit à l'axiome II.) $D(xy) + D(yz) + D(zx) = \pi\gamma$.

$$D(xx') = D(yy') = \frac{1}{2} \pi\gamma.$$

$$D(yx') + D(x'y') + D(y'x) = \pi\gamma - D(xy).$$

Dans tous les cas. $D(xy) \leq \frac{1}{2} \pi\gamma$.

Forme anti-podale. Le segment xy est celui qui ne contient pas les antipodes $-x, -y$; l'autre est le segment anti-podal. Paradoxe: Si z est sur $(x)(y)$,

aucun des 3 points x, y, z n'est entre les 2 autres
[exception à l'ax. II] Mais :

$$D(xy) + D(yz) + D(zx) = 2\pi\gamma.$$

$$D(y, -x) = D(x, -y) = \pi\gamma - D(x, y).$$

Espace hyperbolique. Distance de 2 points réels :

$$D(xy) = \gamma \operatorname{arc} \cosh \frac{\pm(x|y)}{\sqrt{(x|x)(y|y)}} = \gamma \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{-(xy|xy)}{(x|x)(y|y)}}$$

Si $x|x > 0$ pour tout p intérieur de la quadrique
et si $e|x > 0$ pour tout p , x/e étant un p fixe),
il s'ensuit que $x|y > 0$ pour tout p intérieur.
Donc on devra choisir ~~pour~~ un signe tel que $(x|y)$
soit positif.

Il n'y a qu'un seul segment xy qui soit entièrement
situé dans l'espace. Sa longueur est la distance xy .
La distance d'un p quelconque à l'absolu est infinie.
Par suite, la longueur d'une droite quelconque à l'intérieur
de l'espace est infinie.

Constante spatiale. On pourrait supposer que γ est
différente pour chaque ligne et fonction des points x_1, x_2 .
On admettra qu'elle est constante pour toutes les lignes.

Loi d'intensité dans la géométrie elliptique et
hyperbolique. On peut déterminer cette loi en disant que
si x_1 et x_2 ont la même intensité, $x_1 + x_2$ est au milieu
de leur distance. Il en résulte que : $(x_1|x_1) = (x_2|x_2)$
On aura : $(x|x) = 1$, si le point x a l'intensité 1.

Distances de plans et de sous-régions.

On définit la séparation de 2 plans par des formules analogues à celle de la distance de 2 points. Dans l'esystème de mesure elliptique, cette séparation est l'angle des 2 plans. L'absolue d'intensité des éléments plans est analogue à celle des points.

Si 2 sous-régions à $k-1$ dimensions sont contenues dans une sous-région à k dim^s (doublettes sont alors des plans), l'absolu de cette dernière région peut être considéré comme son intersection avec l'absolu de l'espace. $|X_k|$ et $|Y_k|$ sont alors les régions polaires absolues de X_k et Y_k . Leur séparation est égale à celle de ces 2 régions.

Géométrie parabolique.

Chaque ligne rencontre l'absolu en 2 points coïncidents. Donc l'absolu est dégénéré en 2 plans coïncidents.

L'eq. de l'absolu se réduit à : $\sum_1 \xi_1^2 = 0$

Les $(n-1)$ points coordonnés e_2, e_3, \dots, e_n sont dans le plan de l'absolu, à distance infinie ; e_1 est dehors.

Formule de la distance de 2 p. x, y :

$$d = \sum_k \beta_k^2 \frac{(\xi_1 \eta_k - \xi_k \eta_1)^2}{\xi_1 \eta_1}$$

La d'absolue en géométrie parabolique.

Il suffit d'admettre que $x_2 + y$ est au milieu de xy , on a :

$\xi_1 = \eta_1$. Ainsi l'intensité ne dépend que de ξ_1 ; elle est prop. à ξ_1 . La distance de 2 p. d'intensité 1 est :

$$\sum \beta_k^2 (\xi - \eta)^2, \text{ qui peut se réduire à : } \sum (\xi - \eta)^2$$

(Géométrie euclidienne.)

Chap. II Géométrie elliptique.

Trois points a, b, c déterminent 8 triangles, égaux deux à deux: Si l'on appelle $-a, -b, -c; a', b', c'$, on a les 4 triangles différents: $abc, a'bc, ab'c, abc'$.

Soient A, B, C les angles déterminés par les segments ab, bc, ac : on a la formule:

$$\cos \frac{bc}{r} = \cos \frac{ab}{r} \cos \frac{ac}{r} + \sin \frac{ab}{r} \sin \frac{ac}{r} \cos A.$$

Dans le cas où l'un des triangles abc a ses 3 côtés moindres que $\frac{1}{2} \pi r$, on l'appelle principal: les 3 autres ont chacun 2 côtés plus grands que $\frac{1}{2} \pi r$.

Dans le cas contraire, il y a 3 triangles (principaux) qui ont chacun 1 côté supérieur à $\frac{1}{2} \pi r$, et le 4^e a ses 3 côtés supérieurs à $\frac{1}{2} \pi r$.

Formules trigonométriques (analogues de Napier.)

La circonférence d'un cercle de rayon p est: $2\pi r \sin \frac{p}{r}$.

Points intérieurs à un triangle: sont de la forme:

$$\lambda a + \mu b + \nu c, \quad \lambda, \mu, \nu \text{ étant de même signe.}$$

Toute droite située dans la sous-région à 2 diam. de abc , coupe 2 côtés intérieurs & 1 côté extérieurs, ou les 3 extérieurement. Le 4^e cas a lieu si elle a un point intérieur au triangle.

Quadriques ovales. Si 3 p. a, b, c sont intérieurs à une quadrique close, celle-ci coupe extérieurement les 3 côtés ~~de tr. abc~~ ^{d'un des tr. abc} . Si cette tr. est principale, la quadrique est ovale.

Une sphère est une quadrique close; elle est ovale si son rayon est inférieur à $\frac{1}{4} \pi r$. Toute quadrique ovale est entièrement contenue dans une sphère de rayon $\frac{1}{4} \pi r$.

Plans à une face. On définit les deux faces d'un plan en considérant 2 p. a, b situés de part et d'autre [cà d. tels que le segment ab coupe le pl. P] et en les amenant ensuite à coïncider. À l'intérieur d'une sphère, on peut distinguer les 2 faces du plan. Mais si l'on fait décrire à un point une ligne droite située sur la même face du plan à partir du p. a , ce point revient en $-a$, coïncidant avec a , mais sur l'autre face (Klein, Math. Annalen, t. VI.)

Angles entre plans. Triangles stéréométriques (formés par 3 plans). Mêmes formules que pour les triangles sphériques dans l'espace euclidien.

Perpendiculaires: $ab \perp ac = 0$.

Deux points mutuellement normaux sont à la distance: $\frac{1}{2} \pi$. On les appelle quadrantaux.

Distance d'un point à un plan: le plus court segment de la sup. mené du point au plan. Le p. du plan en est à la distance maxima $\frac{1}{2} \pi$.

Perpendiculaire commune à 2 plans.

Distance d'un point à une sous-région.

Distance minima entre sous-régions. La ligne la plus courte ou la plus longue entre 2 sous-régions leur est perpendiculaire.

Sphères. Tout point de la sphère de rayon p et de centre b est à la distance $\frac{1}{2} \pi - p$ du plan pol. $\{b$.

Un plan est une sphère limite, de rayon $\frac{1}{2} \pi$.

Sous-régions parallèles. Toute sous-région qui n'est

ni un point ni un plan a des génératrices droites réelles.

Chap. III. Multiplicités extensives et Géom. elliptique.
Intensité des forces. L'intensité d'une point x est x/x ;
celle d'un plan, F/F . Celle d'une force xy , sera, suivant
certaines conventions: $(x/x)(y/y)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{xy}{y} = (F/F)^{\frac{1}{2}}$

Relations entre deux forces. Il y a 2 droites qui coupent
les 4 forces $F, F', |F, |F'$; elles leur sont perpendiculaires.
Celle est la plus courte, l'autre la plus longue entre F
et F' . Elles sont supplémentaires: $ab = |cd$,
et on a: $ac = bd = \frac{1}{2} \pi F$.

Arès d'un système de forces. Un système S peut se
réduire d'une manière et d'une seule à la forme:

$$S = a_1 a_2 + \varepsilon | a_1 a_2.$$

$a_1 a_2$ et $|a_1 a_2$ sont les axes, ε le paramètre du système.

Lignes parallèles. Si $F, F', |F, |F'$ sont génératrices
d'une quadrique, elles sont coupées par une infinité
de droites, et F et F' ont une infinité de perpendiculaires
communes. Elles sont dites alors parallèles.

Deux lignes parallèles ne peuvent être coplanaires.

Par un p. q. q. on peut mener 2 parallèles à une droite.

Systèmes vecteurs; de la forme: $S = F \pm |F$.

Si une droite rencontre 2 parallèles, la somme des angles
intérieurs est égale à 2 droits; et réciproquement.

Il y a des parallélogrammes dans l'espace elliptique;
seulement ils sont gauches.

Plans et lignes parallèles.

Chap. IV: Géométrie hyperbolique.

Espace et Antispace. Une sous-région réelle peut être contenue tout entière dans l'antispace, mais non dans l'espace.

Un système normal se compose d'un seul point spatial \underline{e} et de $(n-1)$ points antispaciaux.

Si une sous-région est spatiale, son supplément est antispacial.

Intensités des points et des plans.

Distance de points. Pour 2 points spatiaux x, y :

$$\cos \frac{xy}{V} = \frac{(x|y)}{\sqrt{(x|x)(y|y)}}$$

Distances de plans. Si la ligne PQ est spatiale :

$$\cos PQ = \frac{(P|Q)}{\sqrt{(P|P)(Q|Q)}}$$

Lignes spatiales et antispaciales.

Distances de sous-régions (analogues aux distances de plans)

Pôles et polaires.

Points de l'absolue : sont à une distance infinie de tout autre point.

Triangles. Spatiaux si les 3 sommets sont spatiaux ; les 3 sommets peuvent être antispaciaux et les 3 côtés spatiaux : on a alors un triangle semi-spatial.

Propriétés des angles d'un triangle spatial. Un triangle spatial ne peut avoir deux angles obtus. La somme de ses angles est inférieure à 2 droits.

Triangles stéréométriques.

Perpendiculaires, Points normaux: $(x|y) = 0$.

Distance d'un point à un plan; entre sous-régions.

Figures rectilignes rectangulaires dans une région à 2 dimensions. Il n'y a pas de rectangle, car deux lignes n'ont pas deux perpendiculaires communs.

Construction du pentagone rectangulaire. Un côté s'exprime en fonction des deux côtés adjacents, car il est la polaire, par rapport à l'absolue, de leur point d'intersection.

Le hexagone rectangulaire donne naissance à deux triangles conjugués par rapport à l'absolue.

Lignes parallèles: qui se rencontrent sur l'absolue. Leur point d'intersection est à distance infinie. Leur angle est nul.

Par un point on peut mener 2 parallèles à une droite.

Formule du triangle de parallélisme.

On peut mener une parallèle à 2 droites qui se coupent.

Plans parallèles: dont l'intersection touche la quadrique absolue. Leur angle est nul.

Chap. V: Géométrie hyperbolique (suite) Spatiale.

Sphère. Centre spatial ou antispatial. Une sphère à centre antispatial est le lieu des points équidistants d'un plan spatial. Surfaces d'égal distance (!)

Une sphère spatiale est une surface fermée, et contient son centre, s'il est spatial, mais non s'il est antispatial.

Toute ligne spatiale menée par le centre antispatial, coupe la sphère en 2 points spatiaux.

(1) Le plan central est le plan polaire du centre antispatial (spatial).

Intersection des sphères. 2 plans radicaux, lieux des points d'où l'on peut mener des tangentes égales.
Surfaces-limites: Sphères dont le centre est sur l'absolu; dont le rayon est infini. Rayons parallèles.
 Toutes les surfaces limites sont congruentes.

Grands cercles des sphères.

Un espace elliptique de $(n-2)$ dimensions peut être conçu comme une sphère à centre spatial dans ^{un} espace hyperbolique de $(n-1)$ dimensions: Les lignes droites deviennent des grands cercles.

Un espace hyperbolique de $(n-2)$ dimensions peut être conçu comme une sphère à centre antispatial dans un espace hyperbolique de $(n-1)$ dimensions et de moindre constante spatiale.

Un espace euclidien de $(n-2)$ dimensions peut être conçu comme une surface-limite dans un espace hyperbolique de $(n-1)$ dimensions.

Surfaces d'égalité de distance à partir de sous-régions.

Pas de régions parallèles comme ds l'espace elliptique.

Intensités des forces: d'une force spatiale: $(-F/F)^{\frac{1}{2}}$;
 d'une force anti-spatiale: $(F/F)^{\frac{1}{2}}$.

Relations entre deux forces spatiales.

Systèmes de forces; axe central.

Chap. VI: Cinématique à trois dimensions.

Transformations congruentes: 1° laissent inaltérés les relations métriques internes et les intensités des points; 2° transforment des points réels en points réels;

3^o équivalent à une autre transformation n fois
répétée. — Ces transformations transforment
l'Absolu en elle-même directement

Dans l'espace hyperbolique, une transformation
congruente d'axe $a_1 a_2$ et de paramètre δ , équi-
vant à la translation d'axe $a_1 a_2$ et de paramètre δ
($\alpha = 0$) et à la rotation d'axe $a_1 a_2$ et de paramètre α
($\delta = 0$). — Dans la rotation les points de l'axe spatial
restent immobiles; dans la translation, ce sont ceux
de l'axe antispacial.

La rotation diffère de la translation en ce qu'elle
épasse par la position primitive, tandis que dans
la translation on s'en éloigne toujours.

Le lieu des points d'égal déplacement est un quadrique.
Toutes ces quadriques touchent l'Absolu aux extrémités
de l'axe $a_1 a_2$.

Suites équivalentes de transformations congruentes.
Deux déplacements infiniment petits peuvent être intervertis
sans changer le résultat.

N'importe quel déplacement inf. petit peut se décomposer
en 3 translations et en 3 rotations suivant les 3 axes.

Système de forces associé à chaque transformation,
et la définissant complètement. La condition pour
que la transformation soit une translation est $\left\{ \begin{array}{l} SS = 0 \dots \\ S/S > 0, \end{array} \right.$
et une rotation : $\left\{ \begin{array}{l} SS = 0 \dots \\ S/S < 0. \end{array} \right.$

Une force spatiale représente une rotation autour d'un axe
une force antispaciale représente une translation le long
d'un axe polaire.

Travail. Le travail de la force F dans la transformation S est: $-i(F'S)$.

Si 2 systèmes sont réciproques: $SS' = 0$, le travail effectué par l'un dans la transformation symbolisée par l'autre est nul.

Lignes caractéristiques. Celle du p. x est xKx , celle du p. P est PKP , Kx et KP étant les positions inf. voisines de x et de P dans la transformation congruente.

Espace elliptique. Pas de distinction entre les translations et les rotations: car les axes conjugués sont réels. Une translation relative à l'un est une rotation relative à l'autre, et de même paramètre.

Transformation vectorielle (Clifford): dont les 2 paramètres sont égaux en val. abs. Tous les points sont déplacés de la même distance, tous les plans, du même angle. (Lignes de parallèles à l'axe.)

Systèmes vecteurs associés de forces.

Transformations vectorielles successives (Rob. Ball.)

Si l'on intervertit une transf. droite et une transf. gauche, le résultat ne change pas (suivant que les parallèles suivies sont droites ou gauches.)

Chap. VIII: Courbes et surfaces.

Dans l'espace elliptique polaire: $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4$.

$$x_1 = x + \dot{x} d\tau$$

$$\dot{x} = \dot{\xi}_1 e_1 + \dot{\xi}_2 e_2 + \dot{\xi}_3 e_3 + \dot{\xi}_4 e_4$$

L'intensité de x reste égale à 1 dans le déplacement.

$$ds = \kappa \kappa_1: \quad \frac{ds}{dt} = \gamma \sqrt{(\dot{x}/\dot{y})}$$

$\delta \epsilon$ angle de contingence (entre $\kappa \kappa_1$ et $\kappa_1 \kappa_2$)

$$\delta \epsilon = \frac{\sqrt{\kappa \ddot{x} \ddot{y} / \kappa \ddot{x} \ddot{y}}}{(\kappa \dot{x} / \kappa \dot{y})} \delta t = \frac{\sqrt{\kappa \ddot{x} \ddot{y} / \kappa \ddot{x} \ddot{y}}}{\dot{x} / \dot{y}} \delta t$$

Tangente: $\kappa \kappa_1 = \kappa \dot{x}$. Plan normal: $\kappa / \kappa \dot{x} = \dot{y}$.

Ligne polaire: $\dot{y} \ddot{x}$. Plan osculateur: $\kappa \ddot{x} \ddot{y}$.

angle de torsion: $\delta \theta = \frac{\kappa \ddot{x} \ddot{y} \ddot{y} \sqrt{\dot{x} / \dot{y}}}{\kappa \ddot{x} \ddot{y} / \kappa \ddot{x} \ddot{y}} \delta t$

$$\text{Courbure: } \frac{1}{\rho} = \frac{d\epsilon}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{\sqrt{(\ddot{x} \ddot{y} / \ddot{x} \ddot{y})} - (\dot{x} / \dot{y})^3}{(\dot{x} / \dot{y})^2}$$

$$\text{Torsion: } \frac{1}{\kappa} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{\kappa \ddot{x} \ddot{y} \ddot{y}}{\kappa \ddot{x} \ddot{y} / \kappa \ddot{x} \ddot{y}}$$

Le point de la ligne de striction de la développable polaire (enveloppe du plan normal) qui correspond à κ est $\dot{y} \ddot{x} \ddot{y}$ (point de contact de $\dot{y} \ddot{x}$).

Le centre de courbure est $\kappa \ddot{x} \ddot{y} / \ddot{x} \ddot{y}$ (intersection de la ligne polaire et du plan osculateur).

Le rayon de courbure ρ n'est égal à l'inverse de la courbure que dans la géométrie parabolique: car on a:

$$\rho = \gamma \tan \frac{\rho'}{\gamma}.$$

Normale principale: $\kappa \ddot{x} \ddot{y} / \dot{y}$.

Binormale: $\kappa / \kappa \ddot{x} \ddot{y}$.

Formules planaires (tangentes) en vertu de la dualité.

Vitesse et accélération. Le segment $\kappa \dot{x}$ représente la vitesse en grandeur et en direction; $\kappa \ddot{x}$, l'accélération.

La grandeur de la vitesse est $\dot{s} = \gamma \sqrt{\dot{x} / \dot{y}}$.

L'accélération a deux composantes, une tangentielle, \ddot{s} , l'autre suivant la normale principale, $\frac{\dot{s}^2}{\rho}$.
 La grandeur est: $\sqrt{\dot{x}\ddot{x} / x\ddot{x}}$.

Le Cercle. de rayon α , dans l'espace hyperbolique:

$$\rho = \gamma \tanh \frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{Courbure minima: } \frac{1}{\gamma}, \alpha = \infty.$$

Si le cercle a son centre antiparallèle, il est à la distance β d'une droite. Alors: $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \tanh \frac{\beta}{\gamma}$

$$\rho = \gamma \text{ pour } \beta = \infty, \quad \rho = \infty \text{ pour } \beta = 0.$$

Le cercle a son centre sur l'absolu (horicycle)

$$\text{ou a: } \rho = \gamma.$$

Mouvement d'un corps rigide. Translation, si $x\ddot{x} = 0$.

Coordonnées curvilignes de Gauss. sur une surface.

Courbure des surfaces. Expression de $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$.

Lignes de courbure. Théorème d'Euler: rayon de

chaque d'une section normale quelconque, ρ_1, ρ_2 étant ceux des

sections normales principales: $\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \psi}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \psi}{\rho_2}$.

Théorème de Meunier. - Théorème de Dupin.

Surface-limite (horosphère): a les mêmes propriétés

métriques que le plan euclidien.

Chap. VIII: Transition à la Géom. parabolique.

Equation du plan de l'absolu: $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0$.

Intensité du point $\sum \xi e$: $\sum \xi$.

Si l'on prend pour points de référence un p. quelconque e

et 3 p. du plan absolu, u_1, u_2, u_3 , tout point a la

$$\text{forme: } x = \xi e + \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3$$

et son intensité est ξ (tous les p. du pl. abs. ont l'int. 0.)

La quadrique absolue détermine une conique dans le plan absolu, enveloppe de ses plans tangents. On admet que cette conique est imaginaire, pour avoir la mesure elliptique pour l'écartement des plans.

Si l'on prend pour forme initiale de la quadrique l'équation:

$$\Sigma \alpha \xi^2 = 0, \quad (\text{sans termes rectangles})$$

il en résulte que les axes eu_1, eu_2, eu_3 sont orthogonaux.

La différence de 2 points de intensité 1 est un p. à l'infini.

On admet que son intensité est encore 1, ainsi que celle de u_1, u_2, u_3 . Le point $e + u_1$ est le p. de intensité 1 situé à la distance 1 de e sur eu_1 . etc.

La distance entre 2 p. de int. 1: $e + \Sigma \xi u, e + \Sigma \eta u$

est:
$$\sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}$$

Si: $x = e + \xi_1 u_1, \quad \bar{e}x = \xi_1; \quad \text{etc.}$

l'angle θ des 2 plans: $\lambda u_1 u_2 u_3 - \lambda_1 e u_2 u_3 + \lambda_2 e u_1 u_3 - \lambda_3 e u_1 u_2$
 $\lambda' u_1 u_2 u_3 - \lambda'_1 e u_2 u_3 + \lambda'_2 e u_1 u_3 - \lambda'_3 e u_1 u_2$

est:
$$\cos \theta = \frac{\lambda \lambda'_1 + \lambda_2 \lambda'_2 + \lambda_3 \lambda'_3}{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 + \lambda_3'^2)}}$$

Transformations congruentes.

Dans toute transf. congruente, le plan de l'infini est seu latent, et il y a en outre une ligne seu. latente dont le p. à l'infini est latent. Cette ligne est telle; c'est l'axe de la transformation. Tous ses points sont déplacés sur elle de la même longueur γ ; tous les autres points tournent autour d'elle d'un angle δ (en avançant aussi de γ .) Si γ est nul, il y a rotation; si $\delta = 0$, translation.

59

Livre VIII : Application du Calcul de l'extension
à la Géométrie.

Chap. I : Vecteurs.

On va supposer connue la géométrie métrique, et lui appliquer le Calcul de l'extension.

Coordonnées tétraédriques (rapports de volumes)
Points à l'infini (de intensité 0.) Loi spéciale
de intensité: le rapp. des intensités de $(x-y)$, $(x-z)$
est égal au rapport des distances \overline{yz} , \overline{xz} : on
conviendra de prendre l'intensité égale à la distance.

Parallélogramme: $(b-a = d-c) \angle (a-c = b-d)$
 $a+d = b+c$: les 2 diag. se bissectent.

Vecteurs (points à l'infini) direction avec longueur.
Somme: loi du parallélogramme.

En coordonnées cartésiennes (e, u_1, u_2, u_3) tout
vecteur a la forme: $\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3$.

L'intensité d'un élément linéaire (prod de 2 points)
est prop. à sa longueur. On admet qu'elle lui est égale
(quand les 2 p. sont de intensité 1.)

$ab = a(b-a)$ a, b, c étant en ligne droite,
on a: $(a-c)/(b-a) = 0$, $a/(b-a) = c/(b-a)$,

d'où: $ab + bc + ca = 0$, $ab + bc = -ac$.

De un parallélogr. $ab + bc = 2a \frac{b+c}{2} = ad$.

Binecteurs. Deux binecteurs parallèles différent
que par l'intensité, prop. à leur parallélogramme.
On convient qu'elle lui est égale (positive ou négative
suivant le sens de la rotation.)

Les bivecteurs comme carrières. Ajouter un bivecteur à un segment qui lui est parallèle, c'est transporter celui-ci parallèlement à lui-même.

Form générale d'un bivecteur: $\lambda_1 u_2 u_3 + \lambda_2 u_3 u_1 + \lambda_3 u_1 u_2$

Éléments plans. L'intensité d'un élément plan abc est prop. au triangle abc (rapporté au tr. $eu_1 u_2 = e(e+u_1)(e+u_2)$) On convient de la considérer comme double de l'aire de c. tr. prise avec un signe.

$$abc = a(b-a)(c-a)$$

Un élément plan est le produit d'un bivecteur par un point, qui le fixe pour ainsi dire dans un plan déterminé.

Trivecteurs. Tous les trivecteurs sont des multiples numériques de leur dièdre, eux pris pour unité ($u_1 u_2 u_3$) L'intensité d'un trivecteur peut être définie comme son volume de parallélépipède.

Trivecteurs comme carrières. Ajouter un trivecteur à une aire, c'est déplacer celle-ci parallèlement à son plan.

Produit de quatre points. C'est une quantité numérique prop. au tétraèdre abcd. On la considère comme le volume du parallélépipède $a(b-a)(c-a)(d-a)$.

Tout produit nonvecteur est le produit d'un point d'intensité 1, et d'un vecteur dont l'intensité est égale.

Si V et V' sont 2 vecteurs, bivecteurs ou trivecteurs,
 $aV = aV'$ entraîne $V = V'$.

Interprétation géométrique des formules:

$$pq.r.s = pqs.r - pqr.s = prs.q - qrs.p$$

$$pqr.st = pqr.t.s - pqr.s.t = pqst.r + rpst.q + qrst.p.$$

$$abc.def = abcf.de + abce.fd + abcd.ef \\ = adef.bc + bdef.ca + cdef.ab.$$

Formules analogues pour les vecteurs.

Opération de prendre le vecteur. Multiplier un élément non vecteur par le trivecteur-unité U , c'est le réduire à son facteur vecteur. Le produit d'un vecteur par U est nul. Le produit d'un point par U est son intensité.

$$ab.U = aU.b - bU.a = b - a$$

$$abc.U = aU.bc + bU.ca + cU.ab = bc + ca + ab.$$

Théorie des forces. Un système $S = au + M$ a pour vecteur principal $u = SU$, et pour moment vecteur M , par rapport au point de base a couple résultant.

Statique graphique. Polygones funiculaires.

Chap. II: Vecteurs (suite)

Suppléments: e, e_1, e_2, e_3 forment un tétraèdre qui-
conjugué par rapport à une quadrique bitangente.

Le centre est le pôle du plan de l'insimilé: soit e, u, u_1, u_2
3 vecteurs unités formant avec e un système normal (1)

Si la quadrique est une sphère (réelle ou imaginaire) tous
les systèmes normaux sont rectangulaires.

Si elle est imaginaire (rayon $\sqrt{-1}$), on a

$$\cos \theta = \frac{(v/v')}{\sqrt{(v/v)(v'/v')}} \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{vv'/vv'}{(v/v)(v'/v')}}.$$

$$\text{On écrira: } u/u = u^2, \quad m/m = m^2$$

Formules géométriques: $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2(u/v)$

(1) C'est-à-dire e, e_1, e_2, e_3 sont 3 diamètres conjugués.

Prendre le flux Soit le vecteur $v = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3$.

$$|ev = \xi_1 |eu_1 + \xi_2 |eu_2 + \xi_3 |eu_3 = \xi_1 u_2 u_3 + \xi_2 u_3 u_1 + \xi_3 u_1 u_2$$

C'est le vecteur perpendiculaire à v . Inversement, le vecteur perp au vecteur M est $|eM$. Rotation se représente par \mathcal{F} et s'appelle: prendre le flux

Elle est indépendante de l'origine e .

$$|ev = -|v. \mathcal{U}.$$

$$|eM = |M. \mathcal{U}$$

La rotation \mathcal{F} revient, au signe près, à prendre le vecteur du supplément.

Plus-multiplication. $(v \mathcal{F} v) = (v|v) \mathcal{U}.$

$$(M \mathcal{F} M) = (M|M) \mathcal{U}.$$

Formules géométriques.

Axe central d'un système de forces.

Groupes doubles d'un syst de forces (propriétés métriques)

Le cylindroïde Invariants harmoniques.

Groupes triples. Poles et polaires invariants.

Petits déplacements d'un corps rigide. Equivalents à une translation et à une rotation.

Travail de la force F sur le p x et déplacement en $x + \lambda v$:

$$\lambda (F \mathcal{F} v) = W$$

Si le déplacement λv est produit par la transformation congruente λS :

$$W = \lambda (F S)$$

indépendant du point où F est appliqué sur sa direction.

Travail d'un système S dans le petit déplacement $\lambda S'$:

$$W = \lambda (S S')$$

égal au travail du système S' dans le déplacement λS .

Si S et S' sont réciproques, $W = S S' = 0$.

Chap. III. Courbes et surfaces.

Point: $x = e + \sum \xi u$ ξ fonctions de u .

Le vecteur: $x' = \sum \xi' u$.

Son accélération: $x'' = \sum \xi'' u$.

Tangente à la trajectoire: xx' .

Plan osculateur: $xx'x''$.

Binormale: $x \wedge x'x''$.

Plan normal: $x \wedge x'$.

Formules simplifiées: en supposant la vitesse uniforme, c'est-à-dire en remplaçant du par ds . $x' = 1$.

Normale principale: xx'' .

$$\frac{1}{\rho} = (x''/x'') , \quad \frac{1}{\rho^2} = x'x''x'''$$

Polaire de x : $x \wedge x'x'' + \wedge x'$.

Centre de courbure: $x + \frac{x''}{(x'x'')^2} = x + \rho^2 x''$.

Centre de courbure sphérique:

$$x - \frac{\wedge x'x''x'''}{x'x''x'''} = x - \rho^2 \wedge x'x''$$

Rayon de courbure sphérique: $\rho_1^2 = \rho^2 + K \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2$.

Lieu du centre de courbure.

Coordonnées curvilignes de Gauss.

Courbure. Lignes de courbure.

Théorèmes de Dupin, de Euler, de Meunier.

Chap. IV: Formules purement vectorielles.

Pour la Physique math., il est commode de supprimer les points et de ne considérer que les vecteurs. Reformuler un ensemble à 2 dimensions elliptique. Analogie avec la trigonométrie sphérique.

En rapportant tous les vecteurs à une même origine, on les fait correspondre à l'ensemble des points de l'espace.
Notations: $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$

$$x_0 = \sqrt{x^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Le même pour les bivecteurs ou flux X .

Système de forces. Tout système équivaut au vecteur Σf appliqué à l'origine, et au bivecteur $\Sigma x f$, moment du système par rapport à l'origine.

Cinématique. Soit u la vitesse d'un point, u' est son accélération: la direction du plan osculateur est ~~une~~ le bivecteur uu' . La binormale est $[uu']$, le plan normal $|u$, etc.

Distribution continue d'une substance. En Physique, on attribue à chaque point de la matière une quantité scalaire (non dirigée). Ces quantités peuvent être assignées, soit au même point de l'espace occupé par divers points matériels, soit au même point matériel occupant successivement divers points de l'espace. Dans le 1^{er} cas, ~~la~~ la quantité est fonction du temps et des coordonnées, qui ne sont pas elles-mêmes fonctions du temps, ce qui n'a pas lieu dans le 2^e cas.

Opérateur différentiel de Hamilton:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial x_2} + k \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$|\nabla u$ est le Carl du vecteur u , ∇u son Carl-flux.

Divergence de u : $\nabla u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$

∇ peut être traité comme un vecteur dans les calculs.

Si $\frac{d}{dt}$ est l'opérateur différentiel stationnaire, et $\frac{d}{dt}$ l'op. diff. mobile par rapport au temps, on a:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial t} + (u|\nabla)\end{aligned}$$

u étant la vitesse de la matière au point x .

Coordonnées polaires.

Coordonnées cylindriques.

Coordonnées curvilignes orthogonales.

Intégrales. Théorèmes de Green et de Stokes:

$$\iiint (\nabla|u) dv = \iint u dS \quad \iint (\nabla u) dS = \int u |dx.$$

Equations de l'Hydrodynamique: u vitesse du fluide, ρ densité, p pression au point x , f force rapp. à la masse 1. Le curl $q = |\nabla u$ définit le mouvement tourbillonnaire en chaque point. Eq. fondamentale:

$$\frac{dpu}{dt} = -\nabla p + \rho f$$

Si f dérive d'un potentiel φ : $f = -\nabla \varphi$.

$$\frac{du}{dt} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \varphi \right)$$

Equation de continuité: $\nabla|u = 0$.

Origine mobile. Un mouvement uniforme de l'origine ne change pas la forme des équations. Les tourbillons restent les mêmes quelque soit le mouv. de l'origine.

Potentiel vecteur de la vitesse. On admet que les tourbillons n'existent que dans le fini.

Curl-filaments d'é force constante. Soit ϵ le
 curl de \mathbf{v} ; les lignes tangentielles en tout point à ϵ
 sont les curl-lignes de \mathbf{v} ; l'ensemble des curl-
 lignes ~~issues~~ qui passent par un petit circuit fermé
 forment un curl-filament. Soit $d\mathbf{S}$ le vecteur
 en ch. point, $\epsilon d\mathbf{S}$ est la force du filament; et en
 vertu de la condition solénoïdale, $\epsilon d\mathbf{S} = C d\mathbf{S}$.

Fonctions charriées. Fonction q telle que toutes
 les surfaces $q = C^te$ soient occupées successivement
 par le même ensemble de particules matérielles.

- On a appliqué au Calcul de l'extension les méthodes
 inventées par Hamilton et Taft pour les Quaternions.
 Cf. J. W. Gibbs: Vector Analysis.

G. Peano: Saggio di Calcolo geometrico.

Turin, 1896.

Leibnitz, Möbius, Bellavitis, Grassmann, Hamilton.
Étant donné 4 points A, B, C, D , on considère le
tétraèdre $ABCD$ avec un sens déterminé.

$ABCD = 0$ si les 4 points sont dans un plan.
Deux tétraèdres sont égaux quand ils ont même grandeur
et même sens.

Un tétraèdre est considéré comme un produit :

$$A(BCD), (AB)(CD), (ABC)D.$$

Cette multiplication n'est pas commutative, mais
elle a la propriété alterne : le produit change de signe
à chaque inversion de 2 sommets.

Formes géométriques : du 1^{er} degré :

$$x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$$

Du 2^e degré : $x_1 A_1 B_1 + \dots + x_n A_n B_n$

Du 3^e degré : $x_1 A_1 B_1 C_1 + \dots + x_n A_n B_n C_n$

Du 4^e degré : $x_1 A_1 B_1 C_1 D_1 + \dots + x_n A_n B_n C_n D_n$

x_1, x_2, \dots, x_n sont des coefficients numériques réels.

Leur sens est déterminé par les formules (définitions) :

$$(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n) BCD = x_1 A_1 BCD + \dots + x_n A_n BCD.$$

$$(x_1 A_1 B_1 + \dots + x_n A_n B_n) CD = x_1 A_1 B_1 CD + \dots + x_n A_n B_n CD.$$

$$(x_1 A_1 B_1 C_1 + \dots + x_n A_n B_n C_n) D = x_1 A_1 B_1 C_1 D + \dots + x_n A_n B_n C_n D.$$

Une forme de degré $(4-k)$ est nulle, si son produit par
 k points quelconques est nul.

Deux formes de degré $(4-k)$ sont égales, si leurs produits
par k points quelconques sont égaux ($k=1, 2, 3$.)

Si l'on considère les coefficients \pm comme les moments des points correspondants, deux formules du 1^{er} degré sont égales quand elles ont le même moment par rapport à un plan quelconque. (Calcul barycentrique.)

Deux formules du 2^e degré sont égales quand elles ont même moment par rapport à un axe quelconque. (Théorie des forces appliquées à un corps rigide.)

On appelle ligne le produit de 2 points : AB ,
triangle le produit de 3 points : ABC .

Deux lignes sont égales quand elles sont sur la même droite, ont la même longueur et le même sens.

Deux triangles sont égaux quand ils sont dans le même plan, ont la même grandeur et le même sens.

Somme et produit de deux formules de même degré.

L'addition et la multiplication des formules ont toutes les propriétés des opérations arithmétiques (sauf la commutativité de la multiplication) de sorte qu'on peut leur appliquer le calcul algébrique.

Les vecteurs sont des formules du 1^{er} degré, de la forme :
 $B - A$.

Deux vecteurs sont égaux quand ils sont parallèles, de même longueur et de même sens.

La somme d'un point et d'un vecteur est un point :

$$\text{Si } B - A = V, \quad A + V = B.$$

Somme de 2 vecteurs : $(A + V_1 + V_2) - A = V_1 + V_2$.

Avantage de la notation de Grassmann ($B - A$) sur celle de Bellavitis et d'Hamilton (AB) : réduction immédiate au calcul algébrique. Par la formule de Möbius :

$$(1) \text{ et les 2 formules : } AB = -BA \quad AA = 0.$$

$$AB + BC + CA = 0$$

S'écrit: $(B-A) + (C-B) + (A-C) = 0$.

ce qui est une identité algébrique. Les équipollences de Bellavitis deviennent des égalités algébriques.

Formes du 2^e et du 3^e degré.

Toute ligne est le produit d'un point par un vecteur:

$$A(B-A) = AB \quad (AA=0)$$

Le vecteur d'une ligne AB est $B-A$.

Le produit de 2 vecteurs est un bivecteur, forme du 2^e degré correspondant au couple en Mécanique.

Toute forme du 2^e degré est réductible à la somme d'une ligne et d'un bivecteur.

Le produit de 3 vecteurs est un trivecteur (forme du 3^e degré).

Toute forme du 3^e degré est réductible à un triangle ou à un trivecteur.

Coordonnées. Soient A_1, A_2, A_3, A_4 4 formes du 1^{er} degré dont le produit n'est pas nul (4 points non dans un même plan).

Toute forme du 1^{er} degré se mettra sous la forme:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4$$

Toute forme du 2^e degré, à la forme:

$$y_{12} A_1 A_2 + y_{13} A_1 A_3 + \dots + y_{34} A_3 A_4$$

Toute forme du 3^e degré, à la forme:

$$z_1 A_1 A_2 A_3 - z_2 A_1 A_3 A_4 + z_3 A_1 A_2 A_4 - z_4 A_1 A_2 A_3$$

Les coefficients x, y, z sont les coordonnées des formes par rapport aux formes de référence A_1, A_2, A_3, A_4 .

L'volume du tétraèdre déterminé par les 4 points dont les coordonnées sont: (x_1, \dots, x_n) (y_1, \dots, y_n) (z_1, \dots, z_n) (t_1, \dots, t_n) est:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} A_1 A_2 A_3 A_4.$$

On a relation avec la théorie des déterminants.

Cas des coordonnées cartésiennes: les 4 éléments de référence sont le point origine O , et 3 vecteurs non coplanaires I, J, K .

Si les 4 éléments de référence sont 4 points, on a le système de coordonnées baricentriques.

Une forme du 1^{er} degré détermine en général un point;
 2^e ————— une droite;
 3^e ————— un plan.

Produits rigressifs. Le produit d'une forme du 2^e et d'une forme du 3^e degré est une forme du 1^{er} degré (point double-section de la droite et du plan correspondants) $(2+3-4=1)$.
 Le même le produit de 2 formes du 3^e degré (plans) est une forme du 2^e degré (droite); de 3 formes du 3^e degré, une forme du 1^{er} degré (point) $[3+3-4=2; 3+3+3-8=1]$.
 Cette méthode permet d'exprimer les projections et sections.

Opération ω sur les formes

Si \underline{s} est du 1^{er} degré, ωs = la masse (somme des coefficients).

Si \underline{s} est du 2^e degré, ωs = le vecteur de \underline{s} :

$$\omega(AB) = B - A.$$

Si \underline{s} est du 3^e degré, ωs = le bivecteur de \underline{s} :

$$\omega(ABC) = (B-A)(C-A) = BC + CA + AB.$$

Si \underline{s} est du 4^e degré, ωs = le trivecteur de \underline{s} :

$$\omega(ABCD) = BCD - ACD + ABD - ABC.$$

Module d'un vecteur: Sa longueur.

" d'un bivecteur: l'aire du parallélogramme.

" d'un trivecteur: le volume du parallélépipède pris avec le signe relatif au sens.

On appelle indice du bivecteur IJ le vecteur K perpendiculaire à IJ , de sens tel que IJK soit positif, et d'un module égal à celui de IJ .

Réciproquement, l'indice du vecteur K est le bivecteur IJ et l'indice de K : $K = /IJ$ $IJ = /K$.

Si un bivecteur représente un couple de forces, son indice représente son moment.

Les opérations \wedge et $/$ sont distributives.

Théorème: $I/I = (\text{mod } I)^2$

Corollaire: $I/I = I^2$ (puisque $II = 0$.)

$$\text{Sinus}(I, J) = \frac{\text{mod}(IJ)}{\text{mod } I \text{ mod } J}$$

~~Même formule pour~~ Si I est un vecteur et j un bivecteur,

$$\text{Sinus}(I, j) = \frac{Ij}{\text{mod } I \text{ mod } j}$$

$$\text{Cos}(I, J) = \frac{I/J}{\text{mod } I \text{ mod } J}$$

Grassmann appelle le bivecteur IJ le produit externe des 2 vecteurs I, J , et I/J leur produit interne. (produit de I par l'indice de J) Le produit interne représente le travail de la force I dans le déplacement J .

Application à la géométrie cartésienne.

Soient I, J, K 3 vecteurs orthogonaux, de longueur 1, et tels que: $IIK = +1$.

On a: $I/I = J/J = K/K = 1,$

$I/J = J/K = K/I = 0,$

$I \cdot JK = I, \quad J \cdot KI = J, \quad K \cdot IJ = K.$

Un vecteur U de coord x, y, z , a pour expression:

$$U = xI + yJ + zK$$

$$U/U = (\text{mod } U)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Pour quel point: $P = O + xI + yJ + zK$

Soit dans le plan: $\pi = a OJK - b OIK + c OIJ - d IJK$

il faut et il suffit que: $P\pi = 0$

cà d: $ax + by + cz + d = 0.$

La méthode de Grassmann n'exclut pas la géométrie analytique; elle sert à retrouver les formules, et à les interpréter.

Géométrie infinitésimale. Une forme ^{variable} du "degré" S a pour limite S_0 si, quels qu'aient les points PQR ,
on a: $\lim S PQR = S_0 PQR$

Si une forme est fonction d'une variable métrique t , on pose:

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h}$$

La formule de Taylor s'applique aux formes variables.

Si P est un point fonction de la variable réelle t , ses dérivées seront des vecteurs P', P'', \dots . La tangente à la courbe décrite par le point P est la ligne PP' ; le plan osculateur est le plan $PP'P''$.

Si P est fonction de 2 variables u, v , le plan tangent à la surface décrite par P est $P \cdot \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial P}{\partial v}$.

Cf Peano, Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann. Turin, 1888.

G. Peano: Calcolo geometrico secondo l'Aus-
dehmungslehre di H. Grassmann. (Torino, 1888.)

Introduction: Opérations de la Logique déductive.

Notations: \subset : inclusion entre des classes. 9 axiomes.

Formules de développement de Boole.

Propositions: catégoriques, conditionnelles; celles-
ci contenant un ou plusieurs indéterminés.

Notation: $x:\alpha$ = l'ensemble des x qui vérifient α .

En supprimant $x:$, on obtient des formules
entre propositions conditionnelles, analogues
aux formules entre classes.

Opérations sur les propositions: add. mult. membre
à membre; négation des 2 membres (contraposition.)

$$(A \subset B) = (A = AB) = (A + B = B)$$

$$(A \subset B) = (AB' = 0) = (A' + B = 1)$$

Traduction des 4 prop. classiques: A, E, I, O:

$$AB' = 0, \quad AB = 0, \quad AB \neq 0, \quad AB' \neq 0.$$

Conversion de E et I. Contradictaires, contraires.

Conversion (conditionnelle) de A.

Syllogisme: formules générales: Barbara, Disamis.

Formes defectueuses: Darapti.

Résolution de l'éq. à 1 inconnue, Élimination (1)

Vérification de la fausseté de Darapti par élimination.

(1) Application au syllogisme.

Chap. I : Formes géométriques.

Ségment AB; triangle ABC, volume ABCD.

Opérations sur les volumes. Grandeur d'un volume.
Sens d'un volume. Volume nul. Rapport de 2 volumes. Égalité, somme, mult ou par un nombre.

Formes: Définition de leur égalité par l'égalité des volumes correspondants.

$m A = n B$ signifie que les $\overset{\text{Lignes}}{A}$ et B coïncident, et que $m = n$
 $a = b$ signifie que les 2 $\overset{\text{Ségments}}{\text{Lignes}}$ a et b sont dans la même ligne, ont même grandeur et même sens.

$\alpha = \beta$ signifie que les 2 tr. α et β sont dans le même plan, ont même grandeur et même sens.

Opérations sur les formes. Addition. Mult ou par un nombre. Deux volumes ont toujours un rapport (même ligne); deux tr. n'en ont que s'ils sont dans le même plan; deux ségments n'en ont que s'ils sont sur la même ligne.

Produit progressif (forme résultante de S par S'):

$$S = \sum m_i A_i \quad S' = \sum m'_j A'_j \quad SS' = \sum \sum m_i m'_j A_i A'_j$$

$$SS' = (-1)^{ss'} S'S \quad (S \text{ d'ordre } s, S' \text{ d'ordre } s')$$

Chap. II. Formes du premier ordre (Calcul barycentrique de Möbius.)

$$(ABC = 0) = (AB + BC + CA = 0)$$

$$(ABCD = 0) = (ABC - ABD + ACD - BCD \neq 0)$$

Démonstrations par l'intuition.

Théorème: $mA + nB = (m+n)C$.

Masses de une forme du 1^{er} ordre. Centre de gravité.
Toute forme du 1^{er} ordre dont la masse est finie
est réductible à un vecteur: $P-Q$.

Égalité des vecteurs.

Problèmes sur la réduction des formes du 1^{er} ordre.

Toute forme du 1^{er} ordre peut se réduire à un point ^(arbitraire)
(ayant pour masse la masse de la forme) et à un vecteur.

Deux vecteurs parallèles: $IJ=0$.

A, B, C étant en ligne droite, on a:

$$(B-A)(C-A)=0, \text{ ou: } A(B-A)=C(B-A)$$

$$\text{ou: } AB=CA, \text{ ou: } AB+BC+CA=0.$$

I, J, K étant 3 vecteurs parallèles à un même plan

$$\text{on a: } K=xI+yJ, \quad IJK=0. \quad (IJ \neq 0)$$

A, B, C, P étant 4 points d'un plan ($ABC \neq 0$),

$$\text{on a: } P=xA+yB+zC$$

$$\text{et: } ABC=(AB+BC+CA)P.$$

I, J, K, V étant 4 vecteurs de l'espace ($IJK \neq 0$),

$$\text{on a: } V=xI+yJ+zK$$

$$\text{et: } IJKV=0.$$

A, B, C, D, P étant 5 points de l'espace ($ABCD \neq 0$)

$$\text{on a: } P=xA+yB+zC+tD,$$

$$\text{et: } ABCD=(ABC-ABD+ACD-BCD)P.$$

Relation entre 5 points quelconques de l'espace.

Chap. III: Formes du second ordre.

Le segment AB a pour vecteur : $B-A$.

La somme de plusieurs segments d'un même plan, quand la somme de leurs vecteurs n'est pas nulle, se réduit à un segment dont le vecteur est la somme de leurs vecteurs; quand la somme des vecteurs est nulle, se réduit à la somme de 2 segments égaux et opposés.

Polygones funiculaires (Statiographie)

La somme de plusieurs segments parallèles se réduit, si la somme des vecteurs n'est pas nulle, à un segment dont le vecteur cette somme et pour origine le centre ^{ou point pour} de gravité des origines des segments donnés; si la somme des vecteurs est nulle, à la somme de deux segments égaux et contraires.

Un couple de vecteurs $(A-B)$ I équivaut au produit de 2 vecteurs ou bivecteur IJ .

Un bivecteur équivaut à la somme des cotés d'un triangle.

$$IJ = (B-A)(C-A) = BC + CA + AB.$$

La somme de plusieurs segments dans l'espace se réduit en général à un segment et à un bivecteur; ~~et~~ à un bivecteur seul si la somme des vecteurs est 0; et à un segment seul si $SS=0$, c.à.d. $av=0$.

Elle est toujours réductible à la somme de 2 segments.

Propriétés des bivecteurs du triangle du quadrilatère complet.

Chap. IV: Formes du troisième ordre.

Un triangle ABC a pour bivecteur $AB + BC + CA$.

Si la somme des bivecteurs de plusieurs triangles est nulle, la somme de ces triangles se réduit à deux triangles ayant des bivecteurs égaux et contraires (sinon, à un seul triangle.)

La somme de 2 bivecteurs égaux et contraires est un produit de 3 vecteurs, ou trivecteur.

$$IJK = (B-A)(C-A)(D-A) = BCD - ACD + ABD - ABC.$$

$$P(BCD - ACD + ABD - ABC) = ABCD$$

Le produit d'un point par un trivecteur donne un volume indépendant de la position de ce point.

Propriétés projectives du tétraèdre

Chap. V: Formes sur une droite.

Entre 3 formes du 1^{er} ordre sur une droite on a:

$$AB.C + BC.A + CA.B = 0.$$

En effet, entre 3 points non coïncidants on a:

$$C = xA + yB \quad CB = xAB, \quad AC = yAB.$$

$$\text{donc: } AB.C = CB.A + AC.B.$$

$$\text{Ou encore: } AB.C = AC.B - BC.A$$

$$\text{donc: } AB.CD = AC.BD - BC.AD$$

Coordonnées d'une forme C par rapport à 2 formes de référence A et B: les coefficients x et y .

Coordonnées cartésiennes: les formes de référence sont le point O (origine) et le vecteur-unité V .

Rapport au harmonique.

Pour 4 points harmoniques, on a la relation:

$$AC.BD + BC.AD = 0$$

Pour avoir le couple harmonique des 3 p. A, B, C, il suffit de prendre: $D = AC.B + BC.A$

AC, BC sont des facteurs numériques.

Chap. VI: Formes dans un plan

Tout vecteur K du plan peut se mettre sous la forme:

$$K = xI + yJ \quad (IJ \neq 0) \quad (IJ = u)$$

Identité: $IJ.KL = IK.JL - JK.IL$

ou: $(xI + yJ)(x'I + y'J) = (xy' - x'y)IJ$

Bivecteur unité: I et J de longueur 1, perpendiculaires, et POIJ positif (dextrosum.) Surface unité: OIJ.

Définition: $|U$ est un vecteur égal et perpendiculaire à U, dans un sens tel que $U|U$ soit positif.

$$||U = -U \quad |U|V = UV. \quad U|V = V|U.$$

Pour tout vecteur, on a: $U = \text{mod } U \times K$

K étant de longueur 1. $|U = \text{mod } U \times |K$

$$U|U = \text{mod}^2 U \quad (K|K \text{ est le bivecteur-unité})$$

Condition de perpendicularité: $U|V = 0$.

Définitions: $\sin(U, V) = \frac{UV}{\text{mod } U \text{ mod } V}$

$$\cos(U, V) = \sin(|U, |V) = \frac{U|V}{\text{mod } U \text{ mod } V}$$

Identité: $UV \times U'V' = \begin{vmatrix} UV & UV' \\ VU & VV' \end{vmatrix}$

7

donne: $\sin(U, V) \sin(U', V') = \sin(U, V') \sin(U', V) - \sin(V, V') \sin(V', U')$

donc:

$$\sin(U, V) = \sin(U, W) \cos(V, W) - \cos(U, W) \sin(V, W)$$

$$\cos(U, V) = \sin(U, W) \sin(V, W) + \cos(U, W) \cos(V, W)$$

Si l'on a: $U = xI + yJ, \quad V = x'I + y'J,$

on trouve: $UV = xy' - x'y.$

$$U/V = \frac{xx' + yy'}{mod V}$$

$$\sin(U, V) = \frac{xy' - x'y}{mod U \cdot mod V} \quad mod U = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\cos(U, V) = \frac{xx' + yy'}{mod U \cdot mod V}$$

Entre 4 formes du 1^{er} ordre A, B, C, D, on a:

$$BCD.A - ACD.B + ABD.C - ABC.D = 0.$$

on: $ABC.D = BCD.A + ~~CAD.B~~ + ABD.C$

on: $ACD.B - BCD.A = ABD.C - ABC.D$

Définition: $AB.CD = ACD.B - BCD.A.$

AB, CD est le produit régressif ou l'intersection de AB et CD . - En particulier on a:

$$AB.AC = ABC.A, \quad AB.BC = ABC.B, \quad AC.BC = ABC.C.$$

Le produit de 2 segments p, q est une forme du 1^{er} ordre qui appartient à la fois aux 2 lignes;

$$pq = -qp.$$

pq est nul, soit quand l'un des facteurs est nul, soit quand les 2 segments sont sur la même droite, soit quand ce sont 2 bivecteurs.

On a l'identité: $ab.P = a.P.b - b.P.a$:

$abc = 0$ exprime que les 3 ~~droites~~ formes du 2^e ordre a, b, c ont un élément commun.

uab est la masse de la forme ab ; $\text{moda} \text{ mod } \sin(a, b)$
- A_1, A_2, A_3 étant 3 formes du 1^{er} ordre ($A_1 A_2 A_3 \neq 0$),
toute forme du 1^{er} ordre peut se mettre sous la forme:

$$\kappa_1 A_1 + \kappa_2 A_2 + \kappa_3 A_3$$

et toute forme du 2^e ordre sous la forme:

$$u_1 A_2 A_3 + u_2 A_3 A_1 + u_3 A_1 A_2$$

On pose: $a_1 = A_2 A_3, a_2 = A_3 A_1, a_3 = A_1 A_2$.

$$\theta = a_1 a_2 a_3.$$

En prenant pour éléments de référence un point O ,
et 2 vecteurs I et J perpendiculaires ($J = \sqrt{-1} I$), tout
point peut s'écrire: $A = O + \kappa I + \gamma J$

toute forme du 2^e ordre: $a = pJO + qOI + ru$

$$au = qI - pJ \quad (\text{vecteur de } a.)$$

$$\text{moda} = \text{mod}(au) = \sqrt{p^2 + q^2}$$

$$Aa = px + qy + z$$

C'est l'aire du triangle Aa . La distance de A à a
est:

$$\frac{Aa}{\text{moda}} = \frac{px + qy + z}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

Condition pour que A soit sur a : $px + qy + z = 0$.

Intersection de 2 lignes.

$$AA' = (pq' - p'q)O + (qr' - q'r)I + (rp' - pr')J$$

Les coordonnées cartésiennes sont $\frac{qr' - q'r}{pq' - p'q}, \frac{rp' - pr'}{pq' - p'q}$

Si $pq' - p'q = 0$, c'est un vecteur

car les 2 lignes sont alors parallèles.

9

Rapport anharmonique ^{dans un plan} de 4 vecteurs, $\frac{JK}{JK} : \frac{IL}{JL}$
 Vecteurs harmoniques: $I, J, xI+yJ, xI-yJ$.
 ou bien: $I, J, K, JK.J + JK.I$.

En posant: $V|V = (\text{mod } V)^2 = V^2$, on a

$$(V \pm V)^2 = V^2 + V^2 \pm 2V|V,$$

$$(V+V)(V-V) = V^2 - V^2.$$

$$(A-B)|(C-D) + (B-C)|(A-D) + (C-A)|(B-D) = 0.$$

On a les identités suivantes:

$$(bc.b'e')(ca.c'a')(ab.a'b') = abc.a'b'c'.(aa'.bb'.cc')$$

(où a, b, c, a', b', c' représentant, soit les sommets, soit les côtés des 2 tr.) qui expriment le théorème de Desargues sur les triangles homologues.

Equation d'une conique: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$,
 A, B, C étant des points, x, y des nombres.

^{non collinéaires}
 Tangente au point (x, y) : $ABx^2 + 2ACxy + BCy^2$.

Condition pour que le point P appartienne à la courbe.

$$(PCA)^2 - (PBC)(PAB) = 0.$$

Relation entre 6 points d'une conique:

$$(AB.DE)(BC.EF)(CD.FA) = 0.$$

Equation tangentielle d'une courbe comme enveloppe d'une droite.

Quadrilatère complet $ABCD$; si l'on pose

$$X = AB.CD, \quad Y = BC.AD, \quad Z = CA.BD,$$

$$x = YZ, \quad y = ZX, \quad z = XY,$$

on peut construire par proj et sect tous les points de la forme.

$mX + nY + pZ$ et toutes les droites de la forme
 $mX + nY + pZ$, m, n, p et. des n rationnels.

Chap. VII: Formes dans l'espace.

Relation entre 3 vecteurs quelconques:

$$IJK \cdot U = UJK \cdot I + UKI \cdot J + UIJ \cdot K$$

$$UV = (y'z' - y'z) JK + (zx' - z'x) KI + (xy' - x'y) IJ.$$

$$UVW = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} IJK.$$

Produit régulier (intersection) de 2 bivecteurs:

$$\begin{aligned} UV \cdot U'V' &= UV'V' \cdot V - VU'V' \cdot U \\ &= UVV' \cdot U' - UVU' \cdot V' \end{aligned}$$

u, v, w étant des bivecteurs, on a:

$$uv = -vu,$$

$$uv \cdot w = u \cdot vw$$

$$UV \cdot u = Uu \cdot V - Vu \cdot U$$

$$u \cdot V \cdot U = u \cdot U \cdot V - v \cdot U \cdot u.$$

Trivecteur-unité: I, J, K orthogonaux, de long. 1;
 le volume du tétraèdre $O I J K$ étant positif (dextrosum).

Définition de l'indice: $V = |u$, $u = |V$

quand le vecteur V et le bivecteur u sont normaux,
 de même grandeur et que leur produit est positif.

Le produit V/V dans l'espace équivaut au produit
 V/V dans le plan UV , comme on le montre en prenant
 un vecteur auxiliaire. $I = |UV$. $|X = \perp(X)I$.

$$|(U+V) = |U + |V \quad |(UV) = |U|V \quad U/V = V/U.$$

Si: $\text{mod } I = 1$, $I/I = 1$ / trivecteur-unité)

$$\text{En gen: } V/V = (\text{mod } V)^2 \quad u/u = (\text{mod } u)^2.$$

Définitions: $\sin(I, J) = \text{mod}(IJ)$

$$\sin(I, i) = Ii, \quad \sin(i, j) = \text{mod}(ij).$$

$$\cos(I, J) = I/J,$$

$$\cos(I, i) = \text{mod}(I/i), \quad \cos(i, j) = i/j.$$

I, i, j étant de grandeur 1.

$$IJ \times ij = \begin{vmatrix} Ii & Ij \\ Ji & Jj \end{vmatrix}$$

$$\sin(I, J) \sin(K, L) \cos(IJ, KL) = \cos(I, K) \cos(J, L) - \cos(I, L) \cos(J, K)$$

d'où ($L = I$):

$$\cos(J, K) = \cos(I, J) \cos(I, K) + \sin(I, J) \sin(I, K) \cos(IJ, IK)$$

formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

Vecteurs de référence: I, J, K ;

$$i = JK, \quad j = KI, \quad k = IJ.$$

$$I = jk, \quad J = ki, \quad K = ij.$$

$$|I| = i, \quad |J| = j, \quad |K| = k \text{ (droite versée)}$$

$$I/I = J/J = K/K = IJK = 1$$

$$I/J = I/K = J/K = 0.$$

$$\text{mod}(xI + yJ + zK) = \text{mod}(xi + yj + zk) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Intersections. Relation entre 5 ^{formes du 1^{er} ordre} points quelconques:

$$BCDE.A - ACDE.B + ABDE.C - ABCE.D + ABCD.E = 0.$$

Définitions: $AB.PQR = APQR.B - BPQR.A$
 $= ABQR.P + ABRP.Q + ABPQ.R$

$$ABC.PQR = APQR.BC + BPQR.CA + CPQR.AB$$

Si α, β, γ sont des formes du 3^e ordre, on a:

$$\alpha\beta = -\beta\alpha.$$

On a encore pour les produits régressifs la formule

$$SS' = (-1)^{ss'} S'S \quad (s, s' \text{ ordres de } S, S')$$

Soit X un élément d'ordre $s+s'-4$ commun à S et S' , tel que: $XP = S$, $XQ = S'$,

on aura: $SS' = XPQ \cdot X$

Coordonnées. Si $A_1, A_2, A_3, A_4 \neq 0$, toutes les formes peuvent s'exprimer en fonction linéaire de A_1, A_2, A_3, A_4 , et de leurs produits doubles triples et quadruples, et leurs coefficients sont complètement déterminés.

Le produit d'une forme du 1^{er} ordre par le bivecteur-unité ω est sa masse; du 2^e ordre, son vecteur; du 3^e ordre, son bivecteur; du 4^e ordre, son trivecteur.

Coordonnées cartésiennes: Éléments de référence:

$$O, I, J, K \quad IJK = \omega; \quad OIJK = \Omega \text{ (vol. unité)}$$

Tout point est de la forme: $A = mO + xI + yJ + zK$
 m ultra masse; x, y, z , les coordonnées cartésiennes.

Pour $m=0$, on a un vecteur (point à l'infini)

Toute forme du 2^e ordre est de la forme:

$$a = pOI + qOJ + rOK + p'i + q'j + r'k$$

$$a\omega = pI + qJ + rK$$

Toute forme du 3^e ordre est de la forme

$$\alpha = sOi + tOj + uOk + v\omega$$

$$\alpha\omega = si + tj + uk$$

Propriétés du trièdre. Si l'on pose: $\sin(I, J, K) = IJK$
 I, J, K de grandeur 1.
 (bivecteurs)

Le sinus d'un angle trièdre est le produit des sinus d'un desus dièdres par le sinus de l'angle que son arête fait avec la face opposée.

Un triangle composé de 3 arêtes I, J, K de longueur 1; on pos. $\sin(I, J, K) = IJK$.

Le sinus d'un triangle est égal au sinus d'une face par le sinus de l'angle qu'elle fait avec l'arête opposée.

Bissectrices des faces: $I \pm J, I \pm K, J \pm K$.

Plans bissecteurs des dièdres: $i \pm j, i \pm k, j \pm k$.

Récapitulation de formules.

Définition des fonctions homogènes entières.

Une fonction homogène entière d'une forme du 1^{er} ordre définit un lieu geom. (~~surface~~ ^{surface}); d'une forme du 2^e ordre, un complexe linéaire; d'une forme du 3^e ordre, une enveloppe de plans.

Chap. VIII. Dérivées.

Définition des limites: limite d'un volume; puis limite d'une forme d'ordre quelconque.

Dérivée: $A'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [A(t+h) - A(t)]$

$$d(AB) = dA \cdot B + A \cdot dB.$$

La dérivée d'ordre n a pour coordonnées les dérivées d'ordre n des coordonnées de la forme primitive.

$$\lim_{\substack{t_1, t_2 \rightarrow t \\ t_2 - t_1}} \frac{A(t_1)A(t_2)}{t_2 - t_1} = A(t)A'(t)$$

Théorème de Taylor. Dér. des moyennes

$$\lim_{t, t_1, t_3 \rightarrow t} \frac{A(t_1)A(t_2)A(t_3)}{(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)} = \frac{1}{2} A(t)A'(t)A''(t)$$

$$\lim_{t, t_1, t_2, t_3, t_4 \rightarrow t} \frac{A(t_1)A(t_2)A(t_3)A(t_4)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_4-t_1)(t_3-t_2)(t_4-t_2)(t_4-t_3)} = \frac{1}{2 \cdot 3} A(t)A'(t)A''(t)A'''(t)$$

Le démontre au moyen des fonctions interpolaires :

$$A(t, t_2) = \frac{A(t_2) - A(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad A(t, t_2, t_3) = \frac{A(t, t_3) - A(t, t_2)}{t_3 - t_2}, \dots$$

Définition de l'intégrale indéfinie.

$$\text{Si : } A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots \quad A_1, A_2, \dots \text{ élém. fixes,}$$

$$\int A dt = A_1 \int x_1 dt + A_2 \int x_2 dt + \dots$$

Le reste de Taylor peut se mettre sous la forme :

$$\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-z)^n A^{(n+1)}(t+zh) dz$$

Si $A(t)$ est un point, t le temps, $A(t)$ ses dérivées sont des vecteurs. $A'(t)$ est la vitesse (ou la quantité de mouvement) $A''(t)$ son accélération (sa force) AA' est la tangente à la courbe au point t , $AA'A''$ le plan osculateur.

Si A se meut dans un plan, A/A' est la normale. Dans l'espace, A/A' est le plan normal; la binormale est $A/A'A''$. La normale principale est $A(A'A''/A') = (A'/A')AA'' - (A'/A'')AA'$.

$$\int A(\text{mod } A') dt = \int \text{mod } dA \quad \text{est la longueur de l'arc}$$

Si $a(t)$ est une droite mobile dans un plan, aa' est le point d'inters. de 2 pos. inf. voisins, ca dlep de contact

avec la courbe enveloppe. La normale à la courbe est: aa' / ua .

Dans l'espace, la droite $\alpha(t)$ engendre une surface réglée. Le plan $\Pi\alpha'$ est la pt tang. à la surface p. P ; le point $\Pi\alpha'$ est le p de contact du plan Π passant par a .

Si $\alpha(t)$ est une forme du 3^e ordre, si $\alpha\alpha'\alpha''\omega \neq 0$, le p $\alpha\alpha'\alpha''$ est le p d'intersection des 3 plans inf. voisins α . Si $\alpha\alpha'\alpha''\alpha''' \neq 0$, le p $\alpha\alpha'\alpha''$ décrit une courbe, dont la tang. est $\alpha\alpha'$ et le plan osculateur α .

Si $A(u, v)$ est une p. fonction de 2 paramètres, il engendre une surface; la pt tang. est $A \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial A}{\partial v}$; la normale est: $A \left(\frac{\partial A}{\partial u}, \frac{\partial A}{\partial v} \right)$

Chap. IX: Transformations des systèmes linéaires.

Un système linéaire est un ensemble où l'on a défini:

- 1^o L'égalité, comme relation symétrique et transitive;
- 2^o L'addition, comme opération univoque, commutative et associative;

3^o La multiplication par un nombre ~~entier~~ réel;

4^o Un être nul, tel que: $0x = 0$, $x+0 = x$.

Il résulte que toute fonction linéaire homogène:

$ma + nb + pc + \dots$ représente un être du système.

Le nombre de dimensions d'un système linéaire est le nombre maximum d'êtres indépendants entre eux qu'on peut prendre dans le système.

(Sont dépendants les êtres entre lesquels existe une relation linéaire.)

Coordonnées. Limite. Dérivée. Intégrale.

Une opération distributive qu'on peut effectuer sur tout être du système est une transformation (linéaire).

Si le résultat d'une transformation appartient au même système, c'est une substitution.

Le résultat Ra est considéré comme un produit (1)

On pose: $R=S$, si quel qu'est x on a: $Rx=Sx$

$$(R+S)a = Ra + Sa \quad S(Ra) = S(Ra)$$

Les diverses transformations d'un syst. linéaire en un autre forment elles-mêmes un système linéaire.

La multiplication des transformations est associative et distributive, mais non commutative (en général.)

Il y a une et une seule transf. linéaire qui à n éléments indépendants du syst. A fait corresp. n éléments d'un autre syst. B . On écrit: $R = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

Propriétés analogues à celles des fractions.

Si b_1, b_2, \dots, b_n sont aussi indépendants, on a la transf. inverse: $R^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$

Définition des puissances de R

Dérivée de $f(x)$ par rapport à la différentielle x' :

$$(d_{x'}) f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x+hx') - f(x)]$$

C'est une fonction distributive par rapport à x' .

— Considérations sur l'égalité et l'identité: toute égalité peut se réduire à une identité (par abstraction.)

Homographie, involution, } considérés comme substitutions.
Translation, rotation }

(1) La multiplication arithmétique est une transformation.

Georg Cantor : Sur les fondements de la théorie
des ensembles transfinis, trad. Marotte
(Math. Annalen, t. 46 et 49) Hermann, 1899.
(Extr. des Mém. de la Soc. des Sc. phys et nat. Bordeaux)

C'est une théorie des nombres cardinaux et ordinaires
appuyée sur une théorie des ensembles et des types
d'ordre (par suite, à base concrète et réelle.)

§ 1. Notion de puissance ou de nombre cardinal
fondée sur l'équivalence de L'ens. coordonnés.

§ 2. Comparaison des puissances.

Soient $a = \overline{M}$, $b = \overline{N}$; $a < b$ signifie :

1° qu'aucune partie de M n'est égale à N ;

2° qu'une partie de N est équivalente à M .

Les 3 cas: $a = b$, $a < b$, $a > b$,

s'excluent mutuellement, mais rien ne prouve
jusqu'ici que ce soient les seuls cas possibles.

(Cela résulte de la théorie des nombres ordinaux.)

§ 3. Addition et multiplication des puissances.

On considère l'ensemble-somme et l'ensemble-
produit. Commutativité essentielle.

§ 4. Exponentiation des puissances.

On représente l'ensemble N sur l'ensemble M en
faisant correspondre à chaque élément de N un
élément de M . L'ensemble exponentiel $(N|M)$ est

l'union de toutes ces représentations. Leur nombre cardinal est a^b . ($a = \bar{M}$, $b = \bar{N}$.)

[La puissance du continu linéaire est 2^{\aleph_0} .]

§ 5. Les nombres cardinaux finis.

Définition progressive par addition de 1.

Pour tout ensemble de n card finis, il y en a un qui est le plus petit de tous.

§ 6. Le plus petit nombre cardinal transfini \aleph_0 .

Puissance de l'ensemble des n card finis.
Plus grand que tout n finis. $\aleph_0, \aleph_0 = \aleph_0$.

- Théorèmes: Tout ensemble fini est tel qu'il n'est équivalent à aucune de ses parties.

Tout ensemble transfini est tel qu'il a des parties qui lui sont équivalentes.

Suite illimitée des nombres cardinaux. \aleph_α .

§ 7. Types ordinaux des ensembles simplement ordonnés.

1° De 2 éléments e_1, e_2 , l'un est inférieur, l'autre supérieur: $e_1 < e_2$.

2° Si $e_1 < e_2$, $e_2 < e_3$, on a: $e_1 < e_3$.

Notion de type ordinal, fondée sur la considération de la similitude de 2 ens. ordonnés et appliqués.

À ch. n card. infini correspond une classe de types.
Types inverses. Les types d'ordre peuvent être semblables à eux-mêmes d'une infinité de manières (ex: le type η de l'ens. des n rationnels.)

§ 8: Addition et multiplication des types.

Fondées sur la définition de la ~~somme~~ somme et du produit de 2 ensembles ordonnés. Associativité, mais non commutativité. Loi distributive:

$$a / (b + c) = ab + ac$$

dans ces cas seulement (pour le ~~mult~~ ^{sur} somme).

§ 9. Le type η d'un ensemble R de tous les n rationnels > 0 et < 1 , rangés par grandeur croissante.

Caractérisé par les 3 conditions suivantes:

- 1° Son nombre cardinal est \aleph_0 ;
- 2° Il n'a aucun élément inférieur ou supérieur à tous les autres;
- 3° Il est partout condensé, c.à.d. qu'entre 2 éléments quelconques il y en a toujours d'autres.

§ 10. Séries fondamentales contenues dans les ensembles ordonnés transfinis.

Ascendantes ou descendantes: $\alpha_n' < \alpha_{n+1}'$

$$\alpha_n < \alpha_{n+1}$$

Deux séries sont liées: $\alpha_n \parallel \alpha_n'$

1° Lorsqu'elles sont toutes deux ascendantes ou descendantes, si à ch. élém. α_n on peut adjoindre un élément α_n' tel que:

$$\alpha_n < \alpha_n'$$

et si à ch. élém. α_n' on peut adjoindre un élément α_p tel que:

$$\alpha_n' < \alpha_p$$

2° Lorsqu'elles sont de sens contraire, s'il n'y a qu'un seul nombre au plus qui soit inf. à tout α_n et sup.

à tout β_n , et qu'on ait : $\alpha_n > \beta_m$.

Deux séries fond. liées à un même \mathcal{Z} sont aussi liées entre elles.

Limite d'une série fondamentale (ascendante):

1^o Si pour tout n on a: $\alpha_n < I$;

2^o Si pour tout élément m de l'ensemble $< I$, il existe un nombre n_0 tel que: $\alpha_n > m$ pour tout $n \geq n_0$.

Toutes les séries fond. liées entre elles ont même limite; et réciproquement.

(Remarque. La notion de limite ainsi définie est fondée sur l'idée d'ordre, et indépendante de l'idée de grandeur.)

§ 11. Le type \mathcal{O} du continu linéaire

Caractérisé par les propriétés suivantes:

1^o Ensemble parfait (à la fois fermé et condensé);

2^o Il contient un ensemble R dont le n. card. est \aleph_0 , et tel que entre 2 élém. quelconques du 1^{er} il existe toujours des éléments de R .

(Ici, on peut se demander si l'idée du continu n'implique pas nécessairement une idée de grandeur.)

§ 12. Ensembles bien ordonnés.

1° Il y a dans l'ensemble un 1^{er} élém., inférieur à tous les autres ;

2° Si une partie M' de l'ensemble M est telle que M contienne des éléments supérieurs à ceux de M' , il y en a un qui est le 1^{er} de tous, et qui suit immédiatement tous ceux de M' .

- En partic. tout élément est suivi immédiatement d'un autre.

Toute partie d'un ensemble bien ordonné a un élément initial, et réciproquement (cà d que cette propriété caractérise l'ens. bien ordonné)

Toute partie d'un ensemble bien ordonné est un ensemble bien ordonné.

Si dans un ens. b. ord. on substitue à chaque élément un cosubord l'ens. obtenu est aussi bien ordonné.

§ 13. Séquences d'un ensemble bien ordonné.

Ensemble de tous les éléments inférieurs à un élém. non initial. L'ensemble des autres est le reste.

Si les 2 séquences S et S' sont déterminés par les élém. f et f' , et si $f < f'$, $A < A'$, A est un segment de A' .

Un ens. b. ord. n'est semblable à aucun de ses segments.

Un cns. b. ord. peut être semblable à une de ses parties.

Un cns. b. ord. ne peut être semblable à aucune partie de lui-même quelconque de ses segments.

Ses segments différents d'un même cns. b. ord. ne sont jamais semblables.

Deux cns. b. ord. semblables ne sont applicables l'un sur l'autre que d'une seule manière.

Si ch. segm. d'un cns. b. ord. E est semblable à un segm. de l'ens. b. ord. F , et vice versa, les cns. E et F sont semblables.

Si ch. segm. d'un cns. b. ord. E est semblable à un segm. de l'ens. b. ord. F , et si au contraire il y a au moins un segm. de F qui ne soit ressemblable à aucun segm. de E , il y a un segment de F qui est semblable à E .

Si l'un des segm. de l'ens. b. ord. F n'est semblable à aucun segm. de l'ens. b. ord. E , tout segment de E est semblable à un segm. de F .

Donc: E et F étant 2 cns. bien ordonnés, ou bien E et F sont semblables;

ou bien un segm. de E est semblable à F ;

ou bien un segm. de F est semblable à E .

Si une partie d'un cns. b. ord. n'est semblable à aucun de ses segments de cet ens. elle est semblable à l'ensemble tout entier.

§ 14. Nombres ordinaux.

Ce sont les types ordinaux des ensembles bien ordonnés.
Trois cas exclusifs (et seuls possibles) pour 2 no.
ordinaux: $a = b$, $a < b$, $a > b$.

Corollaire: Si $a < b$, $b < c$, on a: $a < c$.

La somme de 2 n. ord. est un n. ordinal.

Elle est toujours $>$ à l'augmente, \geq à l'addende.

Le produit de 2 n. ord. est un n. ordinal.

Il est toujours $>$ au mult and (si le mult eur > 1)
et \geq au mult eur.

La soustraction toujours univoque. (suite)

On peut très faire la somme d'une ~~infinie~~ de n. ord.
Les sommes partielles forment une série fondamentale,
dont la limite est la somme totale.

A ch. série fondam. de n. ord. α correspond un n. ord.
lim α_n , qui leur est immédiatement supérieur.

A ch. n. card. fini correspond un seul n. ord.

A un même n. card. infini a correspond une classe
 $Z(a)$ de n. ord. infinis.

La deuxième classe de nombres est la class. $Z(\alpha_0)$.

§ 15. Les nombres de la deuxième classe.

La 2e classe a un nombre plus petit que tous les
autres: $\omega = \lim. n$ $\bar{\omega} = \alpha_0$.

Si n est un n. ord. de la 1e class. et α de la 2e, on a:
 $n + \alpha = \alpha$, $\alpha - n = \alpha$, $n\omega = \omega$, $(\alpha + n)\omega = \alpha\omega$.

Si α est un n gqque de la 2e classe, l'ensemble des nombres inférieurs des 1^{re} et 2e cl. est un ens. bien ord. de type α , et de nombre cardinal α_0 .

Les deux principes de formation de la 2e classe, auxquels correspondent les deux espèces de n. ord.

§ 16. La puissance de la 2e classe numérique est égale au 2e nombre cardinal transfini α_1 .

§ 17. Les nombres de la forme: $\omega^m n_0 + \omega^{m-1} n_1 + \dots + n_m$.
Tous les n. ord. de la 2e classe se ramènent d'une seule manière, à la forme de fonctions algébriques entières de degré fini de ω .

Addition, multiplication. Décomposition en facteurs premiers de la forme: $\omega^y + 1$.

§ 18. L'exponentielle γ^α dans le domaine de la 2e classe numérique.

Le définit comme la fonction uniforme qui jouit des propriétés suivantes:

1^o $f(0) = \delta$.

2^o Si $x < x'$, $f(x) < f(x')$.

3^o $f(x+1) = f(x) \gamma$.

4^o $[x_n]$ étant une série fond. gqque, on a:

$$f(x) = \lim f(x_n) \quad \text{pour} \quad x = \lim x_n.$$

En prenant $\delta = 1$, on obtient l'exponentielle γ^x .

Pour δ gqque, on a: $f(x) = \delta \gamma^x$. On démontre:

$$\gamma^{x+\beta} = \gamma^x \cdot \gamma^\beta.$$

$$\gamma^{x\beta} = (\gamma^x)^\beta$$

Si $\gamma > 1$, on a toujours: $\gamma^\xi \geq \xi$. 9

§ 19. Forme normale des nombres de la 2^e classe.

$$a = \omega^\alpha k + \alpha' \quad (\text{forme unique})$$

$$\text{où: } 0 \leq \alpha' < \omega^\alpha, \quad 0 < k < \omega,$$

α' est typ $< \alpha$, et $\alpha \leq a$. Forme normale:

$$a = \omega^{\alpha_0} k_0 + \omega^{\alpha_1} k_1 + \dots + \omega^{\alpha_h} k_h$$

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_h \geq 0,$$

$k_0, k_1, k_2, \dots, k_h$ sont des n de la 1^{re} classe.

Addition et multiplication.

Pour que 2 nombres a et b de la 2^e classe vérifient la relation:

$$a + b = b + a, \quad | \quad ab = ba,$$

il faut et il suffit qu'ils aient la forme:

$$a = c^m, \quad b = c^n \quad | \quad a = c^m, \quad b = c^n,$$

m et n étant des n de la 1^{re} classe.

§ 20. Les nombres ϵ de la 2^e classe numérique.

On appelle nombre ϵ toute racine de l'équation:

$$\omega^x = x.$$

Soit γ un nombre ne vérifiant pas cette équation;

$$\gamma_1 = \omega^\gamma, \quad \gamma_2 = \omega^{\gamma_1}, \quad \dots, \quad \gamma_n = \omega^{\gamma_{n-1}}, \quad \dots$$

Les $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ forment une série fondam.
dont la limite $E(\gamma)$ est un nombre ϵ .

Le nombre $E(1)$ est le plus petit des nombres $E(E_0)$
 Soit ε_n un nombre ε , $E(\varepsilon_n + 1)$ est le nombre ε
 immédiatement supérieur.

Si l'on a une suite infinie de nombres ε_n , $\lim \varepsilon_n$
 est encore un nombre ε .

Les nombres ε de la 2^e classe forment un ensemble
 bien ordonné dont le type est Ω et le n^o card α .

Si α est un n^o q^oq^ue inférieur à ε , on a :

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon, \quad \alpha \varepsilon = \varepsilon, \quad \alpha^\varepsilon = \varepsilon.$$

Si α est un n^o q^oq^ue de la 2^e classe, l'équation :

$$\alpha^x = x$$

n'a pas de autres racines que les nombres $\varepsilon > \alpha$

Giovanni Vailati: Le speculazioni di Giovanni Benedetti sul moto dei gravi (Note presentate à l'Accadémie royale des sciences de Turin. Clausen, 1898.)

Importance ~~historique~~ de Benedetti dans l'histoire de la Mécanique (né à Venise 1530, mort à Turin 1590.)
Son ouvrage principal: Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber (Turin, 1585.)

Cf. Libri: Histoire des sciences mathématiques (1838)

Whewell: History of inductive Sciences (London, 1837)

Poggendorf: Geschichte der Physik (1879)

Göhring: Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik (1874)

A reconstruire fausse loi énoncée par Aristote:

« La vitesse des graves en divers milieux est en raison inverse de ~~leur~~ densités de ces milieux »

et remplacée par la suivante:

« La vitesse d'un grave dans un milieu est proportionnelle à son poids apparent dans ce milieu »
qui est exacte, et qui est un cas particulière de la 2^e loi de Newton (proportionnalité du vitesse aux forces.)
Premier essai de réduction de la Dynamique à la Statique.

Contre l'opinion de Aristote, que le solide attire les vapeurs, Benedetti adopte celle de Démocrite, de Straton et d'Epicure, selon laquelle tous les corps sont pesants.
Il explique l'ascension des corps légers par le principe d'Archimède.

Aristote croyait que, dans un même milieu, les vitesses des graves étaient proportionnelles à leur poids. Benedetti est le premier qui démontre que tous les corps tombent avec la même vitesse dans le vide, et que leur vitesse est indépendante de leur poids. Dans un milieu résistant, des corps, ~~même hétérogènes~~, tombent avec la même vitesse si les résistances sont proportionnelles à leurs poids.

Mais il a commis une erreur en affirmant que deux corps hétérogènes, de même forme et de même grandeur, ont des vitesses de chute proportionnelles à leur poids apparent dans le milieu.

Il a connu la loi d'inertie (tendance des corps à continuer leur mouvement en ligne droite, par la tangente). Il explique ainsi la force centrifuge, qui maintient les astres suspendus, malgré leur poids (suivant Empédocle et Anaxagore).

Il connaît aussi la deuxième partie de la loi d'inertie (persistance de la vitesse) et explique par là l'accélération d'un corps soumis à une force constante. La chute est un mouvement uniformément accéléré.

(Aristote et Tartaglia expliquaient l'accélération des graves en disant qu'ils sont d'autant plus pressés qu'ils approchent davantage du lieu auquel ils aspirent.!) (fragment conservé par Simplicius)

Pour Hipparque, un grave lancé verticalement en haut redescend, parce que la vitesse ~~est~~ initiale s'épuise.

(1) Méconnue par Aristote, qui cherchait au contre air à expliquer le fait par traction continue d'une force.

tandis que celle de la chute reste constante ! Quand le corps part du repos, la réaction de l'appui lui imprime une vitesse virtuelle primitivement égale à la vitesse de chute, et qui neutralise partiellement celle-ci. Une fois la vitesse initiale épuisée, le mouvement de chute devient uniforme.

Question posée par Léonard de Vinci et controversée : Qui arriverait-il si le grave pouvait atteindre le centre de la terre ? Les péripatéticiens prétendaient qu'il s'y arrêterait, ayant atteint son but. Maurolycus, Cardan, Tartaglia et ~~Bened. Benedetti~~ pensent au contraire que le grave oscillerait de part et d'autre du centre ; et Benedetti justifie leur opinion par l'analogie du pendule.

Benedetti croit qu'un corps lancé horizontalement est par là retardé dans sa chute (Galilée est le premier qui ait dissipé cette erreur). Il croit que le mouvement de rotation de même qu'il la rend plus légère, et lui permet de s'élever sur sa pointe.

Enfin il était partisan enthousiaste du système de Copernic.

Giov. Vailati: Alcune Osservazioni sulle Questioni
di parole nella Storia della Scienza (Bocca, 1899.)

§ 1. Importance paradoxale des questions de mots dans
le développement de la science. Source d'erreurs, de
sophismes, ou au contraire d'aide très précieux.

§ 2. Le langage scientifique se sert de termes définis (au
moyen d'autres termes) par l'énumération des carac-
tères communs à plusieurs objets. Deux concepts
peuvent avoir même extension et des compréhensions
différentes.

Distinguer les propositions qui énoncent les propriétés
d'un objet et celles qui énumèrent le contenu d'un
concept (le définissent.) Cette distinction n'est pas
marquée dans le langage.

§ 3. Elle est nécessaire en géométrie. Socrate et Platon
recherchaient surtout le sens des mots (?), cher-
chaient des définitions précises par l'énumération
des cas particuliers. Les principaux dialogues de
Platon ont pour objet des définitions de mots.
C'est aussi une gymnastique intellectuelle.

§ 4. La confusion des deux espèces de propositions est la
source de beaucoup d'erreurs. Ex. la loi d'inertie et la
loi d'équilibre présentés comme des lois objectives,
ne sont rien de plus que les définitions des mots force
et moment (aujourd'hui Galilée attachait un sens
métaphysique.)

§ 5. C'est ce qui a donné lieu à l'opinion que les vérités math.
sont a priori et certaines, ~~et~~ indépendantes des choses,

et portant sur des concepts. On les considère comme
fondés sur des définitions et des conventions arbitraires.
Mais alors, il faut justifier chaque fois l'existence de
l'objet correspondant au concept. C'est là le vice de
l'argument ontologique; abus de la deduction.

De même Spinoza, quand il considère les principes de
la mécanique comme évidents (a priori et nécessaires)

§ 6. Inversement, on croit à tort que Berkeley a voulu
ruiner l'existence des choses extérieures, quand il a cherché
à analyser le concept d'existence réelle, et à déterminer
les conditions subjectives auxquelles nous reconnaissons
l'existence objective des choses. De même, on croit
que Hume a voulu ruiner l'existence ou la connaissance
des causes ^{réelles} par son analyse de l'idée de cause et des
critères de la causalité (empiriques).

De là vient encore l'équivoque qui consiste à dire que
la mécanique (engin. la Physique) a pour but, non
de expliquer, mais de décrire les phénomènes. Comme si
l'explication physique pouvait être une chose de plus
que la deduction des phénomènes à partir de certains lois
qui en sont la description ou le résumé.

§ 7. Réaction contre le positivisme sceptique & pessimiste:
expliquer ^{dit-on} c'est réduire un mystère à un autre. Mais
une explication physique est la découverte d'une analogie
réelle entre 2 ordres de phénomènes. (Le 1^{er} s'explique aussi bien
par le 2^e que le 2^e par le 1^{er}; c'est le plus familier qui
explique l'autre.) C'est se tromper sur le rôle de la deduction
dans les sciences expérimentales que de lui reprocher de

S'appuyant sur des principes non démontrés. Il ne faut pas non plus faire appel à la Philosophie (Poincaré) pour établir les principes de la science.

§ 8. Autre illusion: considérer les termes non définis comme plus vagues et plus obscurs: c'est vouloir tout définir. Mauvaise habitude: demander quel est ce que telle chose? c'est vouloir la réduire à une autre chose. Au fond, c'est demander son nom, comme les enfants.

§ 9. Tendance à substantialiser les mots, et à leur assigner des causes. Ex: température, valeur (commerciale) etc. Tous les points de vue auxquels on peut étirer une chose égale à une autre. On réalise des relations.

En donnant un nom à toutes les relations symétriques et transitives, nous les réduisons à l'égalité. Il suffit de définir l'égalité et l'inégalité de 2 choses sous un certain rapport, sans avoir à définir ce rapport même (masse, température, etc.)

§ 10. Illusion de croire que tout nom est le nom de quelque chose. Pourtant, elle a suggéré des généralisations utiles et fécondes, quoique purement verbales (?). Ex: point à l'infini, nombre infini, etc. Notion du calorique (fluide constant) d'où celle de chaleur latente. De même Mayer a été conduit à substantialiser la quantité de chaleur (se transformant en travail). Même illusion matérialiste dans la théorie de la valeur de Marx.

§ 11. De même, la force vive est le qqch chose qui se conserve dans le choc. Ce n'est pas une raison parce que une certaine somme se conserve constante, en Mécanique.

pour appeler tous ces termes énergie, et pour les considérer
comme diverses formes d'une même substance constante.
Toute loi physique peut se représenter comme la
conservation de quelque chose; et n'y a là rien de plus
que la constance ou la permanence de la relation elle-même.

§ 12. Influence des mots sur le progrès des sciences; des
nouvelles formules et expressions; des métaphores scienti-
fiques. Obstacles venant d'une mauvaise notation.

Métaphores inconscientes du langage philosophique.

Les mythes nés de la personification des mots.

§ 13. Pour s'affranchir des illusions du langage, il ne suffit
pas de le vouloir. Il faut l'exercice et l'habitude de la culture
scientifique. Question de l'enseignement classique et de
l'enseignement moderne.

Survivance des erreurs et des préjugés du passé, grâce au
langage. + Utilité de l'histoire des sciences & de la philosophie.
La philosophie n'est pas une vaine logomachie, et son
histoire n'est pas le catalogue des aberrations de l'esprit
humain.

+ Les mêmes causes agissent toujours sur nous et donnent
naissance à des erreurs nouvelles. D'où

Giovanni Vailati: Sull' Importanza delle Ricerche
relative alla Storia della Scienza (Turin, Roux, 1897.)

Le dédain cartésien pour l'histoire vient de l'attitude
subversive que les rénovateurs de la science ont prise
à l'égard de l'autorité des anciens (i. Aristote.) Il fait
place à présent au goût des recherches historiques.

Le monde de l'esprit devient aussi objet de science:
les opinions sont des faits qui ont leurs lois.

L'histoire des sciences tend à devenir elle-même
une science. Elle remarque un processus analogue
dans le développement des diverses sciences (les 3 états.)

L'histoire d'une science n'est pas l'énumération
d'une suite d'idées ~~se succédant~~ aboutissant au succès final,
mais d'une suite de succès partiels qui se dépassent
et s'éclipsent mutuellement, ~~comme~~ c'est un processus
d'approximations successives.

L'histoire d'une science permet de juger de son état
actuel et d'en prévoir l'avenir. L'évolutionnisme
donne une importance particulière à l'histoire des
sciences, non seulement en montrant la continuité
de l'esprit humain (Pascal, Bacon) mais encore en
établissant le parallélisme entre l'évolution (mentale)
de l'individu et celle de l'espèce. (Darwin, Preyer, etc.)

Recherches de psychologie comparée (enfants, sauvages).
La différence entre les géomètres grecs et les géomètres
modernes (par ex. pour le raisonnement par l'absurde)
est analogue à la différence entre l'enfant et l'adulte.

— Enseignement de l'histoire des sciences dans les
Universités allemandes.

Rôle de l'histoire des sciences dans l'enseignement,
de sa valeur pédagogique. La meilleure méthode didactique
est la méthode heuristique, c'est à dire d'invention et
de développement des vérités scientifiques (?)
Les digressions historiques intéressent les élèves plus
qu'un cours didactique et d'inductif.

— Intérêt particulier de l'histoire des mathématiques.
Aucune science ne manifeste mieux la solidarité
du présent et du passé, la collaboration des savants
anciens avec les modernes. Cette collaboration prend
une forme inconsciente, et d'autant plus supérieure,
dans l'emploi des symboles et des algorithmes; ~~pages~~
découvertes des prédecesseurs sont condensées dans les
formules et les règles de calcul. (Superstition de Euclid
pour les résultats du calcul & les formules.)

Les principaux progrès des mathématiques consistent,
moins dans l'acquisition de faits ou de connaissances
nouvelles, que dans l'invention de méthodes d'in-
vention ou de démonstration, ou même de notations
nouvelles ou de procédés de calcul.

Même les plus grands progrès ont-ils paru aux con-
temporains se réduire à des changements de notation,
dont la commodité n'apparaissait pas, à cause de
l'accoutumance aux anciens symboles. C'était
l'objection de Roberval à la Géométrie analytique
de Descartes, d'Huyghens au Calcul infinitésimal
de Leibnitz; on leur reprochait d'exprimer d'une
nouvelle manière des faits déjà connus. Leibnitz
répondait qu'il découvrait et démontrait les mêmes

vérités sous une forme plus commode et plus courte,
ce qui simplifiait les questions et permettait de les
résoudre de plus difficiles et de plus compliquées, qui
échappaient aux anciens procédés.

Les mathématiques sont analogues aux industries
où le capital fixe (matériel, instruments) est beaucoup
plus important que le capital circulant (matières
premières). Aussi le changement de méthodes produit-
il une révolution profonde et coûteuse.

— Considérations spéciales sur la Mécanique

Boltzmann remarque que la Mécanique a subi une
évolution contraire à celle de l'histoire naturelle, qui
de descriptive est devenue explicative. Reichhoff
lui assigne pour objet la description aussi simple
que possible des mouvements de la nature.

Ce ne sont pas les principes qui jugent les faits, ce
sont les faits qui jugent les principes dont on essaie
de les déduire.

Importance des considérations de finalité ou de
commodité (Zweckmäßigkeit, Hertz). De même
que Galilée préfère l'hypothèse de la rotation de la terre
parce qu'elle est la plus commode et la plus simple,
Lagrange et autres ont préféré tel ou tel principe
parce qu'il ~~ressortait~~ était le point de départ le plus
commode et le plus simple pour dériver les autres lois.
De cette lutte pour la vie des principes et résulte
une espèce de sélection qui a ~~la fin~~ fait triompher
les plus simples et les plus généraux, les plus satisfaisants
au point de vue logique et esthétique.

En somme, les principes de la Mécanique sont des
réceptacles appropriés aux faits, des résumés d'expériences
destinés à comprendre le plus de faits possible sous une
seule formule et à en déduire le plus de lois empiriques
possible, de manière à économiser autant que possible
les appels à l'expérience et à l'intuition, à réduire
au minimum les données empiriques de la science.

George Bruce Halsted: Report on Progress in
Non Euclidean Geometry. ap. Science, N.S.
vol. X, n° 251, p. 545-557, 20 octobre 1899)

L'auteur a établi l'indépendance de Lobatchevski
et Bolyai par rapport à Gauss (Science, t. IX, n° 232.)

Voir un article de Poincaré ap. Mouist, t. IX, oct.
(1898) Comme Lobatchevski, il fait dériver la
géométrie des propriétés des corps, du mouvement.

V. Sophus Lie, Ueber die Grundlagen der Geometrie,
ap. Berichte der K. Sachs. Akademie (1890)

Gérard, dans sa thèse, a cherché à établir la
géom. non euclidienne par des constructions permises,
en précisant les postulats: par ex: construire une
droite passant par 2 points donnés. Cette question a
été traitée par Burnside ap. Proceedings of the
London Mathematical Society, t. XXIX (1897)

Il faut traiter les cas où l'un des points, ou tous
les deux, sont à l'infini ou imaginaires.

Killing: Einführung in die Grundlagen der Geometrie
(Paderborn, 1898)

Macaulay: J. Bolyai's Science Absolute of Space,
ap. The Mathematical Gazette, n°s 8 et 9 (1896)

Whitehead (ap. Proceedings ... t. XXIX, mars 1898)
généralisant une vue de Bolyai, a démontré qu'il

existe dans l'espace elliptique aussi bien que dans
l'espace hyperbolique des surfaces réelles dont la
géométrie géodésique est celle des droites du plan
euclidien.

Le Lintamen de Bolyai Parkas a été imprimé
par l'Académie hongroise des sciences (1^{er} vol 1897.)
On y trouve déjà les trois axiomes de Helmholtz
(continuité, congruence et libre mobilité des corps).
La même Académie a imprimé la Correspondance
de Gauss et de Wolfgang Bolyai. En 1816 celui-ci
proposait à Gauss de venir à Göttingue son fils
Jean, âgé de 14 ans - Gauss ne répondit pas, ce qui
a peut-être privé la science du génie de Jean Bolyai.
Brauer Schmidt a republié en 1897 la Scientia
Spatii absolute vera, en latin, avec une traduction
magyar de Sütök.

V. Stäckel et Engel, die Theorie der Parallelinien,
recueil des textes et documents de la G. non euclidienne.
V. pour l'histoire: Loria, Il passato ed il presente
delle principali teorie geometriche, chap. XI.

Roberto Bonola: Bibliografia sui fondamenti della
Geometria in relazione alla Geometria non Euclidea, op.
Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze
Matematiche (1899.)

Ensayo sobre el Infinito, por A. Portuondo,
ingeniero de caminos. Madrid, Arbaux, 1880.

Notions fondamentales. La quantité mathématique est
la grandeur pour laquelle on a défini avec précision
l'égalité et la somme de deux grandeurs.

La mesure des grandeurs est l'origine des nombres
entiers, fractionnaires et incommensurables.

En vertu de la loi générale de continuité, la quantité
est conçue comme continue.

Dans l'analyse supérieure on considère des quantités
variables, indépendantes ou dépendantes (fonctions) et
l'on étudie la loi de variation continue de celles-ci.

Une quantité variable, c'est à proprement parler une loi
de variation continue.

On appelle limite d'un variable une quantité constante
dont elle s'approche indéfiniment (Limite finie est
un pléonisme, car toute constante est finie.)

Les variables indépendantes n'ont pas de limite, car elles
n'ont pas de loi de variation.

Principe des limites: Deux quantités égales (constamment)
ont des limites égales.

Variables infinitement grandes et infinitement petites:
n'ont pas de limite. Le zéro n'a pas de sens comme
limite des inf. petits, et est aussi illusoire que l'infini.

Le seul concept intelligible de l'infini est celui d'une variable qui croît indéfiniment (sans limite)

Pas de zéro non plus, ni de point, ni d'instant; le présent est une chimère. L'espace et le temps sont infinis dans le sens d'indéfiniment grands (indéfinis).

Chapitre I: Ordination et valoration des lois infinitésimales.

Une variable infinitésimale est définie par sa loi de variation. Si l'on choisit pour unité une variable infiniment petite u , et si une autre variable x est telle qu'on ait:

$$\lim \frac{x}{u^n} = k \quad (\text{valeur finie non nulle})$$

n sera l'ordre de l'infiniment petit x , et k sa valeur.

On aura: $x = u^n (k + \omega)$ (ω inf. petit complémentaire de $\frac{x}{u^n}$.)

Rapport de deux infiniment petits:

$$y = u^m (k + \omega); \quad x = u^n (k' + \omega')$$

$$\frac{y}{x} = u^{m-n} \frac{k + \omega}{k' + \omega'} = u^{m-n} \left(\frac{k}{k'} + \omega_1 \right)$$

L'ordre du rapport est la différence des ordres, et sa valeur est le quotient des valeurs.

Si les deux ordres sont égaux, le rapport est d'ordre fini, c'est-à-dire a une limite $\left(\frac{k}{k'} \right)$.

Si les deux valeurs sont en outre égales, le rapport a pour limite 1.

Mêmes considérations pour les infiniment grands, comparés à la limite $\frac{1}{u}$.

Les inf. grands sont ^u des inf. petits d'ordre négatif, et réciproquement.

Changement de limite: Si: $y = u^m (k^m h + \omega)$
et: $x = u^n (k + \omega')$

on aura: $y = x^m (h + \omega_1)$

Continuité du domaine des lois de variation:

Supposons la valeur k inf. petite (décroissant indéf.):

$$x = u^n (k + \omega) \quad \text{d'ordre } +\frac{1}{p}.$$

$$k = u^{-\frac{1}{p}} (k_1 + \omega')$$

$$x = u^n [u^{-\frac{1}{p}} (k_1 + \omega') + \omega] = u^{n-\frac{1}{p}} [k_1 + \omega' + u^{\frac{1}{p}} \omega]$$

Si on a une loi infinitésimale d'ordre n et de valeur inf. petite d'ordre $-\frac{1}{p}$ (équivalent à une loi infinitésimale d'ordre $n - \frac{1}{p}$ et de valeur k_1).

Inversement, une loi infinitésimale d'ordre $n - \frac{1}{p}$ et de valeur inf. petite d'ordre $\frac{1}{p}$ et de valeur k_1 , équivalent à une loi infinitésimale d'ordre n et de valeur k .

L'ordre fini, comme le zéro, manque de sens dans le domaine des infiniment petits. Il ne peut se concevoir qu'une limite d'une loi de variation dont l'ordre n décroît indéfiniment, et dont la valeur k est la limite de la variable. On l'appelle ordre zéro, mais on peut jamais l'atteindre en partant des lois infinitésimales.

Tableau de l'infinitécimal.

Exemple géométrique:

Angle AOB infiniment petit.

Arc AB = α OA = OB = 1.

$\lim OP = \lim OT = 1$.

BP, AT, AB sont des inf. petits d'ordre 1 et de valeur 1.

PA, PT₁, PP₁ sont des inf. petits d'ordre 2 et de valeur $\frac{1}{2}$.

B₁P₁, AT₁, AB₁ _____ 3 _____ $\frac{1}{2}$.

P₁A₁, P₁T₂, P₁P₂ _____ 4 _____ $\frac{1}{4}$.

B₂P₂, AT₂, AB₂ _____ 5 _____ $\frac{1}{4}$; c

Infiniment petits d'ordre fractionnaire :

OF est d'ordre $\frac{1}{2}$ et de valeur 1.

OG _____ $\frac{1}{4}$ _____ 1.

OH _____ $\frac{3}{4}$ _____ 1.

OT _____ $\frac{1}{8}$ _____ 1.

OK _____ $\frac{3}{8}$ _____ 1.

OL _____ $\frac{5}{8}$ _____ 1.

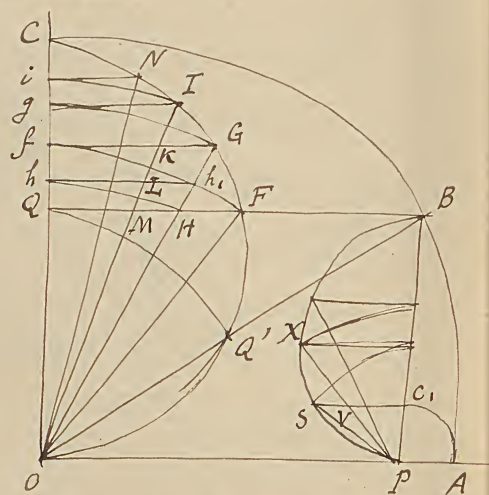
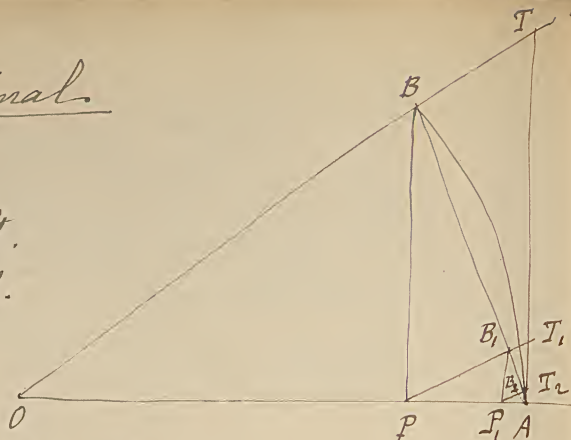
OM _____ $\frac{7}{8}$ _____ 1.

Interpolation d'ordres fractionnaires entre le 1^{er} et le 2^e ; et ainsi de suite.

PS est d'ordre $\frac{3}{2}$ et de valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

PX _____ $\frac{5}{4}$ _____ $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$;

PV _____ $\frac{7}{4}$ _____ $\frac{1}{\sqrt{2} \sqrt[4]{2}}$ — etc.



Chapitre II: Opérations algébriques sur les variables infinitésimales.

Symboles. Définition de l'égalité et de la somme de deux quantités variables ou lois de variation.

Le résultat d'opérations algébriques effectuées sur des variables continues qui ont des limites est une variable qui a pour limite le résultat des mêmes opérations effectuées sur leurs limites.

Ce théorème n'a pas de sens pour les variables infinitésimales. Si pourtant on dit que les infiniment petits ont pour limite 0, et les infiniment grands ont pour limite ∞ , l'application du théorème conduit à des symboles qu'il faut interpréter.

§ I. Somme et reste. $0+0, 0-0$.

Si les ordres sont inégaux, la somme est du même ordre et de la même valeur que l'inf. petit d'ordre inférieur. Si les ordres sont égaux, la somme est du même ordre et sa valeur est la somme des valeurs.

La différence de deux inf. petits de même ordre a même valeur que celui dont l'ordre est le plus petit; ~~et~~ si les ordres sont égaux, elle est du même ordre et sa valeur est la différence des valeurs.

La différence de deux inf. petits de même ordre a même valeur est inf. petite par rapport à eux, donc d'ordre supérieur.

Réciproque. Application au Calcul des Différences.
En particulier: variables à limite (d'ordre zéro.)

Propositions analogues pour les infiniment grands.

$0 + \infty$, $\infty - 0$, $0 - \infty$ sont inf. grands.

$$a + 0 = a; \quad a + \infty = \infty.$$

$$a - 0 = a; \quad a - \infty = -\infty.$$

$$0 - a = -a \quad \infty - a = \infty.$$

Exemples géométriques.

§ II. Multiplication. 0×0 , $\infty \times \infty$, $0 \times \infty$.

Le produit de deux infiniment petits est un inf. petit dont l'ordre est la somme de leurs ordres et la valeur le produit de leurs valeurs.

De même pour les infiniment grands.

Car particulier : valeurs à limite (d'ordre zéro)

Généralisation : produit d'un inf. petit par un inf. grand;
produit d'un inf. petit ou d'un inf. grand par une variable à limite : $a \times 0$, $a \times \infty$.

Exemples géométriques.

§ III. Division. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{\infty}{0}$, $\frac{0}{\infty}$.

Le quotient de deux infiniment petits est un inf. petit dont l'ordre est la différence des ordres et la valeur le quotient de leurs valeurs.

De même pour les infiniment grands.

Car particulier : quand le quotient est d'ordre zéro (à une limite,

Généralisation : quotient d'un inf. petit par un inf. grand,
d'un inf. grand par un inf. petit; d'un inf. petit ou inf. grand
par une variable à limite ($\frac{0}{a}$, $\frac{\infty}{a}$; $\frac{a}{0}$, $\frac{a}{\infty}$).

Exemples géométriques.

§ IV. Puissances et racines. $0^a, \sqrt[a]{0}, \infty^a, \sqrt[a]{\infty}$.

Inf. petits et inf. grands à exposant constant a :

$$\text{Si: } \mu = u^m(k+w), \quad \mu^a = u^{ma}(k^a+w)$$

Le même si l'exposant a est une variable à limite a .
(la base doit être positive.)

Base constante, exposant infinitésimal: $\underline{a^0}, \underline{a^\infty}$.

$$\text{Si: } \mu = u^m(k+w), \quad a^\mu = a^{u^m(k+w)}$$

$$\log a^\mu = \mu \log a = u^m(k+w) \log a$$

Si μ est inf. petit, le logarithme a pour limite zéro,
donc l'exponentielle a pour limite 1. Réciproque.

Si μ est inf. grand, l'exponentielle sera inf. grande ou
inf. petite suivant que son logarithme sera positif ou
négatif (cà d. suivant que μ sera de même signe que $\log a$
ou de signe contraire.) Réciproque.

Le même si la base est une variable à limite a .

L'exponentielle 1^μ (μ inf. petit ou inf. grand) est une
constante dont la valeur est 1.

Lorsque la base a de l'exponentielle tend vers la limite 1,

1° Si l'exposant est inf. petit, elle a pour limite 1:

$$\log a^\mu = \mu \log a = u^m(k+w) \log a \quad (\text{inf. petit})$$

2° Si l'exposant est inf. grand, le log. sera inf. petit,
fini avec limite ou inf. grand suivant que l'ordre du
facteur inf. petit $\log a$ sera supérieur, égal ou inférieur
à l'ordre du facteur inf. grand $\mu = \frac{1}{u^m}(k+w)$.

Suivant ces trois cas, l'exponentielle aura pour limite 1, aura une limite différente de 1, ou sera infinitésimale (inf. petit si le log. est négatif; inf. grande s'il est positif)

Si la base et l'exposant sont tous deux infiniment grands:

$$\log M^N = N \log M = \frac{1}{u^n} (h+w) \log \frac{1}{u^m} (k+w)$$

le log. est inf. grand si $N > 0$, inf. petit si $N < 0$. Donc l'exponentielle est inf. grande si l'exposant est positif, inf. petite si l'exposant est négatif. Le même.

Une exponentielle de base inf. petit et d'exposant inf. grand est inf. grande si l'exposant est négatif et inf. petite si l'exposant est positif. (parce que log μ est alors inf. petit négatif)

Enfin, dans le cas où la base est inf. grande et l'exposant inf. petit: $\log M^v = v \log M = u^n (h+w) \log \frac{1}{u^m} (k+w)$

le log. $(0 \times \infty)$ peut être inf. petit, fini ou inf. grand.

Suivant les cas, l'exponentielle aura pour limite 1, aura une limite différente de 1, ou sera infinitésimale (inf. petite si le log. est négatif; inf. grande s'il est positif)

Le même pour l'exponentielle à base et exposant inf. petits

$$\log \mu^v = v \log \mu = u^n (h+w) \log u^m (k+w).$$

Exemples géométriques.

§ I. Symboles d'indetermination: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$,

1° ou $\sqrt[0]{1}$; ∞° ou $\sqrt[\infty]{\infty}$; 0° ou $\sqrt[0]{0}$.

Ces sont les symboles qui, dans certains cas, correspondent à des limites finies bien déterminées, les lois de variation étant connues.

Exemple géométrique: Centres de homothétie de deux cercles infiniment petits (les lois de variation des rayons étant données.)

Cubien: composition de deux rotations inf. petites.

En résumé, on n'a des symboles d'indétermination que dans les problèmes indéterminés, c.à.d. quand les données manquent en nombre ou en précision.

Chapitre III. Théorèmes fondamentaux du Calcul infinitésimal.

La limite du rapport de deux infiniment petits ne change pas quand on les remplace par d'autres ^{de même ordre} infiniment petits de même ordre (pouvant être différents) et de valeurs proportionnelles aux valeurs des premiers. — Réciproque

En particulier, ... quand on les remplace par des infiniment petits de même ordre et de même valeur (autrement dit, dont les rapports aux premiers ont pour limite 1; ou encore: qui diffèrent du premiers d'une quantité inf. petite par rapport à eux-mêmes ^{c.à.d.} [d'ordre supérieur]).

Ce théorème sert de base au Calcul différentiel, où il s'agit de trouver la limite du rapport de 2 inf. petits.

En effet, il permet de modifier l'inf. petit complémentaire ω (en particulier de le ramener, ce qui se fait quand on remplace la différence par la différentielle.)

Le problème général du Calcul intégral se ramène aux Quadratures, savoirs d'un n. inf. grand d'inf. petits

Soit m l'ordre des inf. petits à sommer, k, k', k'', \dots
leur valeur. Soit n l'ordre ^{de la somme} des ~~inf.~~ ^{inf.} grandes.

$$\sum k = K.$$

Trois cas :

Si $m > n$, la somme est infiniment petite ;

Si $m = n$, la somme a pour limite la valeur K ;

Si $m < n$, la somme est infiniment grande.

De plus, le nombre N des inf. petits à sommer
est du même ordre que K , puisque tous les k sont finis.
Donc : la somme d'un nombre infiniment grand
d'infiniment petits de même ordre est une variable à limite,
quand l'ordre des inf. petits est égal à l'ordre du nombre
inf. grand ; et la limite est la valeur de la somme inf.
grande des valeurs des inf. petits.

Par suite, la condition nécessaire et suffisante pour que la
limite d'une telle somme ne change pas, est quand on
remplace les inf. petits par d'autres, est que la somme
de leurs valeurs ait toujours la même valeur. La
Réciproque est vraie.

Une condition suffisante, mais non nécessaire, est que
les nouveaux inf. petits aient respect² les mêmes valeurs
que les anciens (que leurs rapports aient pour limite 1.)
Ce théorème sert de base au Calcul des Quadratures.

Note : On a mis en doute l'rigueur du Calcul infinitésimal,
parce qu'on se croyait pris dans ce dilemme : ou bien commettre
une erreur, ce qui réduit le Calcul à un calcul d'approximation ;
ou bien considérer le rapport de deux séries, et la somme d'un
nombre infini de séries, ce qui n'a pas de sens. On y échappe
en traitant simplement des limites de rapports et de sommes.

Conclusion: Importance des variables infinitésimales.

Elles s'introduisent dès l'arithmétique par la mesure des grandeurs incommensurables, ou l'on est forcé de recourir au concept de limite. Elles permettent de définir les notions fondamentales de diverses sciences; la courbure en un point; le poids spécifique en un point; la vitesse et l'accélération en un instant, etc. (d'un mouvement connu).

La détermination de la vitesse en un instant revient au problème général du Calcul différentiel (Calcul des fluxions).

Inversement, un mouvement est parfaitement déterminé quand on connaît sa vitesse à chaque instant: c'est un problème de Calcul intégral (Calcul des quadratures): connaître l'accroissement de la fonction qui correspond à un accroissement donné de la variable indépendante.

Notion de longueur curviligne (se définit par intégrale)

Théorie des contacts de divers ordres entre deux courbes.

Deux courbes. $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$

ont un contact d'ordre $(n-1)$ au point: $x = a$,

quand: $f(a+u) - \varphi(a+u) = u^n \left(\frac{f^{(n)}(a) - \varphi^{(n)}(a)}{1.2.3. \dots n} + w \right)$

L'ordre de ~~la fonction~~ l'infinitésimal de cette différence exprime l'intensité du contact; sa valeur permet de le comparer à un contact du même ordre.

(L'infinitésimal du) La note finale est destinée à montrer que, si le rapport de deux fonctions inf. petites est toujours du même ordre d'infinitésimalité que le rapport de leurs premières dérivées non nulles, il n'a la même valeur que si ce rapport a une limite (est finie) c.à.d. si les deux premières dérivées non nulles sont du même ordre.

Note finale : sur le rapport de deux fonctions inf. petites.
 Soient $f(x)$, $\varphi(x)$, nulle pour $x=a$; on étudiera le
 rapport: $\frac{\varphi(a+u)}{f(a+u)}$ où u est inf. petit.

1er Cas. $\varphi(a+u)$ et $f(a+u)$ sont inf. petits de même ordre n ,
 c'est-à-dire que leurs dérivées sont nulles jusqu'à la $(n-1)^e$ incl.
 $\varphi(a+u) = u^n \left(\frac{\varphi^n(a)}{1.2.3...n} + w \right)$; $f(a+u) = u^n \left(\frac{f^n(a)}{n!} + w' \right)$

donc:
$$\lim \frac{\varphi(a+u)}{f(a+u)} = \frac{\varphi^n(a)}{f^n(a)}$$

limite commune de $\frac{\varphi'(a+u)}{f'(a+u)}$, $\frac{\varphi''(a+u)}{f''(a+u)}$, ..., $\frac{\varphi^{n-1}(a+u)}{f^{n-1}(a+u)}$,
 et: $\frac{\varphi^n(a+u)}{f^n(a+u)}$.

2e Cas. $\varphi(a+u)$ est d'ordre supérieur à $f(a+u)$ [$n > m$].

Alors $\frac{\varphi(a+u)}{f(a+u)}$ est inf. petite d'ordre $n-m$, et sa valeur
 est:
$$V = \frac{\varphi^n(a)}{f^m(a)} \cdot \frac{1}{(m+1)(m+2)...n}.$$

Les rapports des dérivées successives sont du même ordre, mais
 leurs valeurs vont en croissant, car elles sont respectivement:

$$\frac{n}{m} V, \frac{n(n-1)}{m(m-1)} V, \dots, \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m(m-1)...3.2.1} V.$$

3e Cas. $n \leq m$. Alors les rapports sont inf. grands d'
 ordre $m-n$, et ont les mêmes valeurs que ci-dessus:
 seulement elles vont en décroissant.

Mêmes conclusions si la ~~valeur~~ variable indépendante
 est inf. petite ou inf. grande ($a=0$, $a=\infty$)

Le même pour le rapport de deux fonctions inf. grandes.

P. Appell: Leçons sur l'attraction et la
fonction exponentielle. (Carré, 1892)

Loi de Newton

$$F = \frac{f m \mu}{r^2}$$

Attraction d'un corps de densité ρ (variable) sur un
point (α, β, γ) de masse μ .
(fonction de x, y, z)

$$X = f \mu \iiint \frac{\rho(x-\alpha)}{r^3} dv$$

$$Y = f \mu \iiint \frac{\rho(y-\beta)}{r^3} dv$$

$$Z = f \mu \iiint \frac{\rho(z-\gamma)}{r^3} dv$$

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

Si l'on pose:

$$u = \iiint \frac{\rho dv}{r}$$

on a:

$$X = f \mu \frac{\partial u}{\partial \alpha}$$

$$Y = f \mu \frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$Z = f \mu \frac{\partial u}{\partial \gamma}$$

En coordonnées polaires;

$$u = \iiint \rho r dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

Pour un point P extérieur à la masse attirante:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} = 0. \text{ (eq. de Laplace)}$$

Pour P intérieure:

$$\Delta u = -4\pi k$$

(eq. de Poisson)

k étant la densité au point $P(\alpha, \beta, \gamma)$.

Attraction d'un corps sur un point P très éloigné
(à la distance R d'un point O quelconque du corps).

$$u = \frac{1}{R} \iiint \rho \, dv + \frac{1}{R^2} \iiint \rho \, dv \cdot \delta \cos \theta + \frac{1}{R^3} \iiint \rho \, \varepsilon \, dv$$

Or: $\iiint \rho \, dv = M$, donc $\lim_{R \rightarrow \infty} Ru = M$.

Si O est le centre de gravité, $\iiint \rho \, dv \cdot \delta \cos \theta = 0$.

Attraction d'une couche sphérique composée de
couches concentriques homogènes.

P extérieure: $u = \frac{M}{r}$, $F = \frac{M}{r^2}$.

P intérieure: $u = 4\pi \int_{R_0}^{R_1} \rho R \, dR = \text{Const.}$

$$X = Y = Z = 0.$$

P dans l'épaisseur de la couche (à la dist r du centre).

$$u = \frac{4\pi}{r} \int_{R_0}^r R^2 \rho \, dR + 4\pi \int_r^{R_1} \rho R \, dR$$

— Démonstration de l'équation de Poisson

$$\iiint \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) dv = \iint (aF + bG + cH) \, d\sigma$$

a, b, c étant les cosinus de la normale extérieure
de l'élément de surface $d\sigma$.

Pour: $F = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $G = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ $H = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

et: $\lambda = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

Formule de Green:

$$\iiint \rho \cdot \Delta \varphi \, dv + \iiint \lambda \, dv = \iint \rho \left(a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \, d\sigma$$

On écrit aussi : $a \frac{\partial q}{\partial x} + b \frac{\partial q}{\partial y} + c \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{dq}{dn}$,
dérivée de q suivant la normale.

Faisons : $\rho = \rho(x, y, z)$, $q = \frac{1}{r}$.

Pour P extérieure, la formule de Green donne :

$$\iiint \lambda dv = \iint \rho \frac{dq}{dn} d\sigma \quad (\text{car } \Delta q = 0)$$

Pour P intérieure, k étant la densité au point P :

$$\iiint \lambda dv = \iint \rho \frac{dq}{dn} d\sigma + 4\pi k$$

En appliquant à : $u = \iiint \rho q dv$

la formule : $\iiint \frac{\partial F}{\partial x} dv = \iint a F d\sigma \quad [F = \rho q]$

on trouve en remarquant que : $\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial r}$,

on trouve : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\iiint \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} dv + \iint \rho \frac{\partial q}{\partial x} d\sigma$

d'où : $\Delta u = -\iiint \lambda dv + \iint \rho \frac{dq}{dn} d\sigma = -4\pi k$

En faisant dans la formule de Green : $\rho = 1$, $q = u$,
il vient : $\iiint \Delta u \cdot dv = \iint \frac{du}{dn} d\sigma$

on a : $\Delta u = -4\pi \rho$. $\iiint \Delta u \cdot dv = -4\pi \iiint \rho dv = -4\pi M$.

Théorème de Gauss :

$$\iiint \frac{du}{dn} d\sigma = -4\pi M$$

étant la somme des masses comprises dans la surface
à laquelle est due l'intégrale en $d\sigma$.

Corollaire: La fonction potentielle ne peut avoir ni maximum, ni minimum en dehors des masses attirantes.

En effet, en tout point extérieur entouré d'une sphère infiniment petite, on a.

$\oint \frac{du}{dn} ds = 0$,
ce qui ne serait pas possible si u était maximum ou minimum en ce point ($\frac{du}{dn} < 0$, $\frac{du}{dn} > 0$).

Par suite, il ne peut y avoir que des positions d'équilibre instable en dehors des masses attirantes.

Masses attirantes illimitées:

L'attraction d'une droite ^{homogène} indéfinie sur un point extérieur est perpendiculaire à cette droite et a pour valeur:

$$- \frac{2f\mu h}{\delta}$$

μ étant la masse du point intérieur, δ la distance à la droite, et h la densité linéaire de la droite.

L'attraction d'un plan sur un point est indéterminée.

L'attraction d'un cylindre indéfini à base finie sur un point P de masse μ , de coordonnées $\alpha\beta\gamma$, a pour

composantes: $X = 2f\mu \frac{\partial V}{\partial \alpha}$, $Y = 2f\mu \frac{\partial V}{\partial \beta}$, $Z = 0$

V potentiel logarithmique.

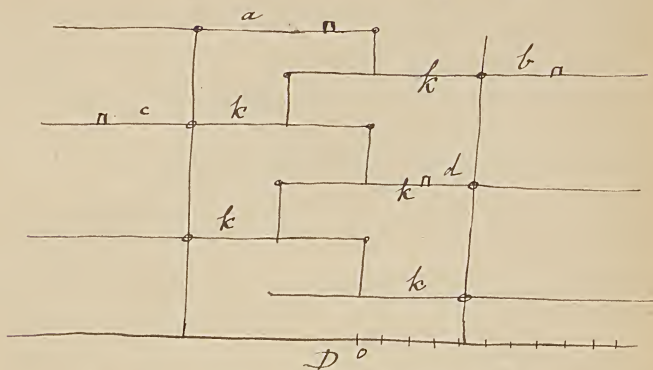
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} = 0.$$

Fonction la plus simple:

$$\frac{1}{x} \text{Log}(\alpha^2 + \beta^2)$$

Machine à résoudre les équations algébriques.

un système de leviers
cités, de longueur l
le l , on dispose des
travaux, l est à la
ance a du point
appui, le 2^e à la distance
etc. a, b, \dots étant



positivement ou négativement selon qu'on les porte
dedans ou en dehors. Soit D la distance (variable) des
axes qui portent tous les points d'appui, et $k = D - l$.
La condition d'équilibre du système est:

$$\left(a \frac{k}{l} + b \right) \frac{k}{l} + c \frac{k}{l} + d \left\{ \frac{k}{l} + \dots \right\} = 0$$

ou, en posant $\frac{l}{k} = x$:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots = 0$$

On place l'un des axes jusqu'à ce qu'on ait établi l'équilibre
du système, et l'on trouve la valeur de x sur une règle divisée.
On obtient ainsi toutes les racines réelles ^{positives} supérieures à 1.
On obtient les racines positives inférieures à 1, on remarque

on pose: $\frac{k}{l} = x$,
on trouve les racines inférieures à 1 de l'équation:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \dots = 0$$

Il faut donc disposer les coefficients dans l'ordre inverse, en
commençant par le levier inférieur -
on obtient les racines négatives, il faut changer le signe des
de deux en deux, c.à.d. compter positivement les longueurs
sur la droite des leviers, négativement les l p. à gauche.

Formules d'Electricité.

Loi de Coulomb:

$$F = k \frac{m m'}{r^2}$$

Flux de force:

$$\Phi = \int F ds \cos \alpha$$

Flux de force à travers une surface fermée contenant M.

$$\Phi = 4\pi k M.$$

Potentiel:

$$dV = -dE = -F dn = -(X dx + Y dy + Z dz)$$

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$V = \sum \frac{k m}{r}$$

ou:

$$V = k \int \frac{dm}{r} = \int \frac{\rho dV}{r}$$

Potentiel d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur:

$$V = \frac{4\pi k \mu R^2}{a} = \frac{M}{a}$$

intérieur:

$$V = 4\pi k \mu R = C^{\text{te}}$$

Potentiel d'une sphère composée de couches concentriques homogènes sur un point intérieur:

$$V = 2k\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}k\pi\rho a^2$$

$$F = -\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{4}{3}k\pi\rho a.$$

$$\Delta V = 4\pi k\rho.$$

Force exercée par une surface électrisée sur un point extérieur infiniment voisin:

$$F = 4\pi k\mu$$

Relation entre la charge et la capacité d'un conducteur:

$$M = CV$$

Pour une sphère homogène: $M = RV.$

Capacité d'un condensateur plan (d = distance des armatures):

$$(4\pi k\mu = -\frac{\partial V}{\partial n})$$

$$C = \frac{S}{4\pi k d}.$$

Capacité d'un condensateur sphérique: $C = \frac{1}{k} \cdot \frac{RR'}{R' - R}$

Capacité d'un condensateur cylindrique par unité de longueur:

$$C = \frac{1}{2k \log \frac{R'}{R}}$$

Tension électrique ou pression électrostatique:

$$\tau = 2\pi k \mu^2 \quad (\text{par unité de surface})$$

La force exercée par une surface électrisée sur un des ses éléments est:

$$F = 2\pi k \mu^2 ds = \tau ds$$

Energie électrique:

$$W = \sum \frac{kmm'}{r}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum MV = \frac{1}{2} \sum CV^2 = \frac{1}{2} \sum \frac{M^2}{C}$$

Force exercée sur un corps électrisé: $F = - \frac{dW}{dr}$

Loi d'Ohm: $E = V_1 - V_0 = IR$

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Loi de Joule: $W_{\text{Joule}} = RI^2t = RIQ \quad (Q = It)$

Lois de Kirchhoff. 1^o pour les sommets:

$$\sum I = 0$$

2^o pour les circuits:

$$\sum (IR - E) = 0$$

Constante diélectrique: $\frac{k}{k'} = K$ (k dans le vide)

Electromètre sphérique: $F = \frac{V^2}{8k}$

Electromètre Richat-Blondlot: $F = \frac{(V_1 - V_2)^2}{4k \log \frac{r_1}{r_2}}$

Electromètre de lord Kelvin: $F = \frac{S}{8\pi k} \left(\frac{V_1 - V_2}{d} \right)^2$

Electromètre à quadrants:

$$F = \frac{r}{4\pi kd} (V_1 + V_2 - 2V_0)(V_1 - V_2)$$

Dans la disposition symétrique de M. Mascart:

la déviation α est proportionnelle à $-4V_0V_1$.

~~Force magnétique~~ ~~sur un pôle~~: $M = \frac{MF}{\mu}$

~~Moment du couple directeur~~: Loi de Coulomb pour les forces magnétiques:

$$V = \frac{M \cos \alpha}{r^2} \quad F = \frac{mm'}{\mu r^2} \quad V = \sum \frac{m}{\mu r}$$

Moment magnétique: $M = mL$

Composantes de la force exercée par l'aimant inf. petit AB sur la unité de masse magnétique en P:

$$X = \frac{2M \cos \alpha}{\mu r^3} \quad Y = \frac{M \sin \alpha}{\mu r^3}$$

Dans la 2^e position de Gauss:

$$X_0 = \frac{2M}{\mu r^3} \quad Y_0 = \frac{M}{\mu r^3}$$

Intensité d'aimantation: $dM = I dr$

Potentiel d'un aimant sur un point extérieur P:

$$V = \int \frac{I \cos \alpha}{r^2} dr$$

Moment magnétique d'un courant fermé: $M = \frac{SI}{r} \cdot (1)$

Potentiel magnétique d'un ~~filament~~ ^{faucille} sur un point d'où on voit sous l'angle solide ω : $V = P\omega$ (2)

Boussole des tangentes: $\tan \beta = \frac{2\pi I}{HR}$

Id (forme de M. Lippmann): $\tan \beta = \frac{4\pi I}{H}$

Electrodynamomètre de M. Pellat: H

$$I = \sqrt{\frac{LP}{4\pi NS}} = K\sqrt{P}$$

Induction d'un solénoïde magnétique: $P = I\sigma$ $dM = P dx$

Induction d'un feuillet magnétique: $P = Ie$ $dM = P ds$

Potentiel d'un solénoïde: $V = I\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

Courants variables. Intensité moyenne: $I = \frac{1}{t} \int I dt$

Energie moyenne: $W = \frac{R}{t} \int I^2 dt$

Galvanomètre balistique: $Q = \frac{2K}{g\gamma} \sqrt{\frac{H}{M}} \sin \frac{\alpha}{2}$

I durée d'oscillation pour H:

$$Q = \frac{H T}{\pi g} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Travail électromagnétique: $d\mathcal{E} = I d\mathcal{F}$ (1)

Equation de l'induction: $\mathcal{E} I dt = R I^2 dt + I d\mathcal{F}$

$$\text{ou: } \mathcal{E} = R I + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$$

Force électromotrice induite: $\mathcal{E}' = - \frac{d\mathcal{F}}{dt}$

Coefficient d'induction mutuelle: $\mathcal{F} = M I$. $\mathcal{E}' = - M \frac{dI}{dt}$

Coefficient de self-induction: $\mathcal{F} = L I$. $\mathcal{E}' = - L \frac{dI}{dt}$

Force magnéto-électrique (F intensité du champ mag.): $(\frac{1}{2}) \frac{d\mathcal{F}}{dt}$

$$X = \mathcal{F} I ds \cdot \sin \theta$$

Action d'un courant sur un courant (formule de Laplace):

$$\mathcal{F} = -2 \frac{II' ds ds'}{r^2} \left(\sin \theta \sin \theta' \cos \varepsilon - \frac{1}{2} \cos \theta \cos \theta' \right)$$

Travail élémentaire: $d\mathcal{E} = II' d \iint \frac{\cos \omega \cdot ds ds'}{r}$

d'où: $M = \iint \frac{\cos \omega \cdot ds ds'}{r}$

Equation de l'établissement d'un courant: $I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t})$

Equation de rupture d'un courant: $I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L} t}$

Potentiel d'un courant fermé sur un point d'où on tire sous l'angle solide ω : $V = I \omega$ en gsm; $W = - I \mathcal{F}$

(1) Force exercée sur un courant fermé: $X = \frac{d}{dx} (\mathcal{F} I)$

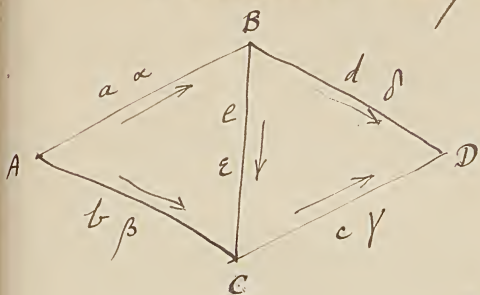
$$X = - \frac{d\mathcal{E}}{dx} \quad \mathcal{E} = \mathcal{F} I$$

Quantité d'électricité induite par la variation de flux $\Delta \mathcal{F}$:

$$Q = - \frac{\Delta \mathcal{F}}{R}$$

(2) Loi de Biot et Savart: $F = 2 \frac{m I}{a}$ Formule de Laplace: $F = \frac{m I ds \cdot \sin \theta}{r^2}$

Formule du pont de Wheatstone.



Soit E la force électromotrice de la pile, ou la différence de potentiel entre les sommets A et D ; soient $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$

les résistances des cinq branches,

et $a b c d e$ les intensités inconnues du courant qui les traverse dans le sens indiqué par les flèches; on a, d'après les lois de Kirchhoff les relations suivantes:

$$a = d + e \quad \alpha a + d \delta = E \quad \alpha a + e \epsilon = b \beta$$

$$c = b + e \quad b \beta + c \gamma = E \quad e \epsilon + c \gamma = d \delta$$

En effectuant les éliminations suivantes:

$$a = d + e \quad b = c - e \quad c = \frac{d \delta - e \epsilon}{\gamma}$$

$$d = \frac{E - e \alpha}{\alpha + \delta}$$

on trouve la solution:

$$e = E \frac{\alpha \gamma - \beta \delta}{\alpha \delta (\beta + \gamma) + \beta \gamma (\alpha + \delta) + \epsilon (\alpha + \delta) (\beta + \gamma)}$$

Pour que le courant qui passe par le galvanomètre (e) soit nul, il faut et il suffit qu'on ait:

$$\alpha \gamma - \beta \delta = 0$$

ou:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma} \left(= \frac{\alpha + \delta}{\beta + \gamma} \right)$$

Dans ce cas, on a simplement:

$$a = d = \frac{E}{\alpha + \delta}, \quad b = c = \frac{E}{\beta + \gamma}.$$

Calcul du potentiel et de la force
de deux masses (électriques ou magnétiques) symétriques
et infiniment voisines.

Loi de force: $F = \frac{mm'}{r^n}$

$$= \frac{m}{n-1} \left(\frac{1}{r'^{n-1}} - \frac{1}{r''^{n-1}} \right) = \frac{m}{n-1} \times \frac{r''^{n-1} - r'^{n-1}}{(r'r'')^{n-1}}$$

$= l$ (infiniment petit.) $r = r' = r''$

$$r'' - r'^{n-1} = (r'' - r') (r''^{n-2} + r''^{n-3} r' + \dots + r'^{n-2})$$

$$= (n-1) r^{n-2} (r'' - r')$$

$r' = BC = l \cos \alpha$. $V = \frac{ml \cos \alpha}{r^n} = \frac{M \cos \alpha}{r^n}$

Composantes de la force:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial r} = n \frac{M \cos \alpha}{r^{n+1}} \quad (dy = r d\alpha)$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dy} = \frac{M \sin \alpha}{r^{n+1}}$$

car: $F = \frac{M}{r^{n+1}} \sqrt{n^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{M}{r^{n+1}} \sqrt{1 + (n^2 - 1) \cos^2 \alpha}$

$\alpha = 0$, $F = X_0 = n \frac{M}{r^{n+1}}$

$$\frac{X_0}{Y_0} = n$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$, $F = Y_0 = \frac{M}{r^{n+1}}$

$$= \frac{Y}{X} = \frac{1}{n} \operatorname{tg} \alpha \quad \operatorname{tg}(\theta + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta} = \frac{(n+1) \operatorname{tg} \alpha}{n - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

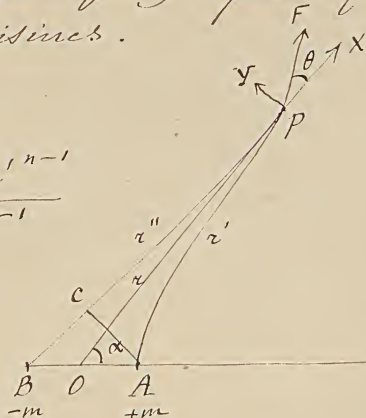
$\theta + \alpha = 0$ pour $\operatorname{tg} \alpha = 0$ ($\alpha = k\pi$)

$\theta + \alpha = \infty$ pour $\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{n}$, c.à.d. si $n = 2$:

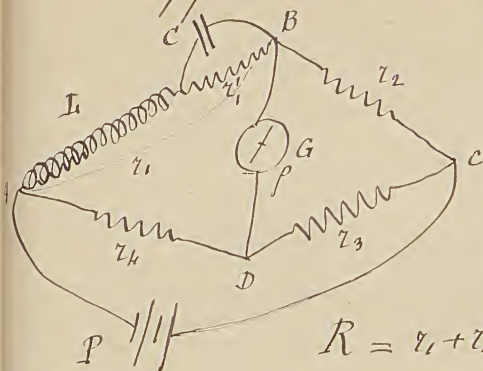
pour $\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{2}$ ($\alpha = 56^\circ 44' 8''$)

$\theta + \alpha = 0$ pour $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ ($\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$)

car: $\operatorname{tg}(\theta + \alpha) = 0$ pour $\alpha = k\frac{\pi}{2}$.



Opposition d'une self induction et d'une capacité.



Condition d'équilibre du pont en régime permanent: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_4}{r_3}$.

Courant de rupture: r_2 r_3

$$RI + L \frac{dI}{dt} = 0$$

Intégrons (de I_0 à 0) $QR - LI = 0$.

$$Q = \frac{LI}{R}$$

$$R = r_1 + r_4 + \frac{1}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r_2 + r_3}}$$

Fraction de Q qui passe par G :

$$Q_x = \frac{r_2 + r_3}{\rho + r_2 + r_3} Q.$$

Charge du condensateur C :

$$M = CV = CI r'_1.$$

Fraction de M qui passe par I :

$$M_y = \frac{r'_1}{R} M. \quad M_x = \frac{r_2 + r_3}{\rho + r_2 + r_3} M_y.$$

Condition d'équilibre au moment de la rupture:

$$M_x = Q_x \quad \text{ou} \quad M_y = Q$$

$$C r_1'^2 = L.$$

Autre disposition: la capacité est en dérivation sur la branche opposée à la self-induction: on a encore:

$$Q = \frac{LI_1}{R_1}.$$

Mais la charge du condensateur est:

$$M = CV = CI_2 r'_3$$

La fraction de M qui passe par r_2 est:

$$M_y = \frac{r'_3}{R_2} M$$

et la fraction de M_y qui passe par G :

$$M_x = \frac{r_1 + r_4}{\rho + r_1 + r_4} M_y.$$

La condition d'équilibre à la rupture est:

$$M_x = Q_x.$$

$$\frac{CI_2 r_3'^2}{r_2 + r_3 + \frac{1}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r_1 + r_4}}} = \frac{r_2 + r_3}{\rho + r_2 + r_3} \times \frac{LI_1}{r_1 + r_4 + \frac{1}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r_2 + r_3}}}$$

(R_2)
 (R_1)

$$\frac{C r_3'^2}{I_1} = \frac{I_1}{I_2} \times \frac{r_2 + r_3}{r_1 + r_4} \times \frac{\rho + r_1 + r_4}{\rho + r_2 + r_3} \times \frac{r_2 + r_3 + \frac{\rho(r_1 + r_4)}{\rho + r_1 + r_4}}{r_1 + r_4 + \frac{\rho(r_2 + r_3)}{\rho + r_2 + r_3}}$$

Or: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_3 + r_4}{r_1 + r_2} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_4}{r_1} \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_4} = \frac{r_2 + r_3}{r_1 + r_4}$

$$\begin{aligned} (\rho + r_1 + r_4)(r_2 + r_3) + \rho(r_1 + r_4) &= \rho(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + (r_1 + r_4)(r_2 + r_3) \\ (\rho + r_2 + r_3)(r_1 + r_4) + \rho(r_2 + r_3) &= \rho(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + (r_1 + r_4)(r_2 + r_3) \end{aligned}$$

Donc: $\frac{C r_3'^2}{I_1} = \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_1} \quad \underline{C r_3'^2 = \frac{r_3}{r_1} I_1}$

r_3 étant une somme constante, on peut faire varier r_3' et mesurer ainsi la self-induction I_1 , connaissant r_1 , par l'équilibre du pont en régime permanent.
 L'avantage de la 2^e disposition sur la 1^{re} consiste précisément à laisser r_1 constante et à ne pas détruire l'équilibre du pont en faisant varier r_3' .

Sur la stativité de la nature.

Loi de Lenz: Le courant induit tend à s'opposer à la ^{modification} transformation (déplacement) qu'il produit. (Mascart, 368.)

— Dans le cas de l'inversion d'un courant thermodynamique, s'il n'y avait que des forces électromotrices de contact, le courant transporterait de la chaleur de la soudure froide à la soudure chaude, et par conséquent s'augmenterait et s'accroîtrait de lui-même; cela est contraire au principe de Carnot. (Mascart, 203.)

— Un courant qui traverse une soudure dans un sens la chauffe, dans l'autre sens, la refroidit. Le sens pour lequel il y a refroidissement est celui du courant qui produirait le chauffage de la même soudure; sans quoi le courant s'entreten-drait de lui-même indéfiniment. En réalité, les variations de température produites par un courant tendent à s'affaiblir, en développant des forces électromotrices inverses. (Mascart, 212.)

De même qu'un courant qui traverse un électrolyte développe une force électromotrice inverse de polarisation.

Conséquences du principe de Carnot / Marcart,
 Dans une transformation adiabatique

$$cdT = -T \frac{\partial}{\partial T} (dE)$$

Le corps s'échauffe ou se refroidit suivant que le
 travail des forces extérieures - dE nécessaire pour
 produire la transformation ^{augmente} ~~diminue~~ ou ^{diminue} ~~augmente~~
^{quand} la température ^{croît} diminue. Ainsi, quand la transformation
 équivaut à celle qui résulterait d'une diminution de
 température, le corps s'échauffe; il y a refroidissement
 si le travail extérieur produit un effet de même sens
 qu'une élévation de température.

En résumé, la variation de température tend à
 s'opposer au travail extérieur; autrement dit, le
 travail extérieur fait varier la température dans un
 sens ~~qui s'oppose~~ ^{et qui s'oppose} à la transformation.
 Ainsi il semble que la nature résiste aux changements
 d'état, et tende à atténuer et à avorter les ^{et} transformations.

Voir Sir W. Thomson. Philosophical magazine, t. V, p. 4 (1878) [5]

Remarques sur la corrélation des mathématiques et de la physique.

Le potentiel électrique, dont la définition est purement analytique (fonction dont les dérivées changées de signe sont les composantes de la force) prend une existence physique et devient une grandeur observable et mesurable dans l'électromètre. $\frac{1}{t} \int I dt$

— L'intensité moyenne d'un courant alternatif n'est nulle, mais son énergie moyenne $\frac{1}{t} \int RI^2 dt$ ne l'est pas; aussi agit-il sur l'électrodynamomètre et non sur le galvanomètre (l'indication de celui-ci étant proportionnelle à l'intensité, et celle du premier au carré de l'intensité.) Ce fait physique réalise ce fait purement algébrique, que tout carré est positif, lequel dérive de la définition, conventionnelle ou apparente, de la multiplication: $(-a)(-a) = +a^2$. Règle paradoxale ou tout au moins arbitraire.

— Contre la thèse d'Helmholtz et des dynamistes, qu'une grandeur physique n'existe que dans l'instrument qui la mesure et n'est définie que par lui:

Le galvanomètre sert à mesurer toutes les grandeurs électriques; une même déviation correspond, suivant les cas, à une force électromotrice, à une résistance, à une capacité. Pour interpréter ses indications, il faut donc avoir l'idée de la grandeur à mesurer, et cela, par la construction et la disposition des appareils.

Remarque curieuse: On n'a d'étalons que des résistances, des forces électromotrices et des capacités; or on ne peut mesurer directement ces grandeurs, on les compare à l'étalon. On ne les mesure que par l'intermédiaire des intensités ou des quantités d'électricité (galv. balistique) (galvanomètre) dont on n'a pas d'étalon. Ainsi les mesures primitives ne dépendent pas de la possibilité de réaliser un étalon matériel (comme le mètre ou le gramme).

— Résistance critique d'un galvanomètre balistique.

L'angle θ de déviation est une fonction du temps qui vérifie une équation différentielle de la forme:

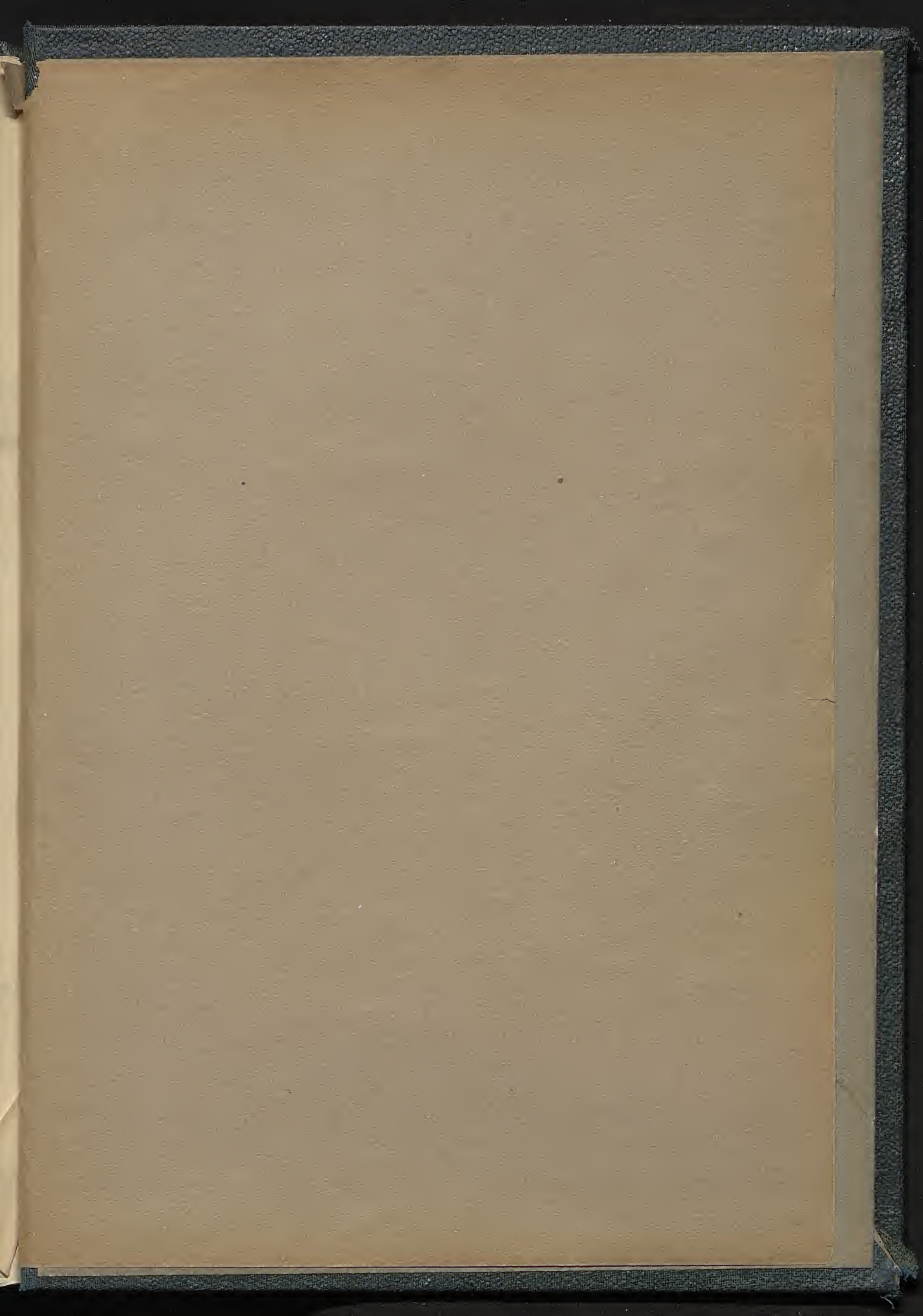
$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0.$$

Suivant que l'équation caractéristique:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

a ses racines réelles ou imaginaires, l'intégrale est une exponentielle réelle ou une fonction trigonométrique (Sinus). Dans le 1^{er} cas, le galvanomètre est apériodique; dans le 2^e cas, il oscille. Cela dépend de la résistance du circuit du galvanomètre (1^{er} cas quand elle est trop petite, 2^e cas quand elle est trop grande). La résistance critique correspond au cas intermédiaire, où les racines sont égales et alors que le galvanomètre revient le plus rapidement au zéro sans le dépasser. C'est là une réalisation physique des racines imaginaires, et une illustration expérimentale de la formule de Moivre: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, qui a pour conséquence la relation des fonctions circulaires avec les exponentielles imaginaires.





2e Partie.
4e fascicule.

